Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Akademska 2014/2015.
Odsjek: Matematika i informatika

Sadržaj vježbi iz
Linearne algebre

Literatura za dodatno spremanje ispita:

- V. Perić: „*Algebra I (prsteni i moduli, linearna algebra)*“, Svjetlost Sarajevo, 1987.
- H. Jamak: „*Algebra*“, Nik Sezam Sarajevo, 2004.
- C. D. Meyer: „*Matrix analysis and applied linear algebra*“, SIAM, 2000. **(naša preporuka)**
- S. Axler: „*Linear Algebra Done Right*“, 2nd Edition, Springer, 2004.

Osnovne definicije i rezultati iz Uvoda u linearnu algebru

(0.01) Simetrije
Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica (matrica oblika $n \times n$).
a) Za A kažemo da je *simetrična matrica* kadgod je $A = A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = a_{ji}$.
b) Za A kažemo da je *nakrivo-simetrična matrica* kadgod je $A = -A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = -a_{ji}$.
c) Za A kažemo da je *hermitska matrica* kadgod je $A = A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog simetričnosti.
d) Za A kažemo da je *nakrivo-hermitska matrica* kadgod je $A = -A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog nakrivo-simetričnosti. ⋄

(0.02) Dijagonalne i trougaone matrice
a) Matrice oblike $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix}$ zovemo *dijagonalne matrice* i često ih označavamo sa $diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d)$.
b) *Glavna dijagonala* kvadratne matrice su elementi koji se nalaze na dijagonalnoj liniji koja počinje u gornjem lijevom uglu matrice a završava u donjem desnom uglu. Za kvadratnu matricu kažemo da je *trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale ili ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kavadratnu matricu kažemo da je *gornje-trougaona matrica* ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kvadratnu matricu kažemo da je *donje-trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. ⋄

(0.03) Inverzna matrica
Za datu kvadratnu matricu $A_{n\times n}$, matricu $B_{n\times n}$ koja zadovoljava uslov

$$AB = I \quad \text{i} \quad BA = I$$

zovemo *inverz* od A i označavamo sa $B = A^{-1}$. Nisu sve kvadratne matrice invertibilne - nula matrica je trivijalni primjer, i postoji veliki broj nenula matrica koje nisu invertibilne. Za invertibilnu matricu kažemo da je *nesingularna*, a za kvadratnu matricu koja nema inverznu matricu kažemo da je *singularna matrica*. ⋄

(0.04) Saglasan i nesaglasan sistem
Za sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih kažemo da je *saglasan sistem* ako posjeduje bar jedno rješenje. Ako sistem nema rješenja, tada za sistem kažemo da je *nesaglasan sistem*. ⋄

(0.05) Elementarne red (kolona) operacije
Elementarne red (kolona) operacije su:
(i) Zamjena mjesta redova (kolona) i i j.
(ii) Množenje reda (kolone) i sa $\alpha \neq 0$.
(iii) Dodavanje reda (kolone) i pomnožene nekim brojem redu (koloni) j. ⋄

(0.06) Ekvivalencija
(i) Kadgod matricu B možemo dobiti iz matrice A kombinacijom elementarnih red ili kolona operacija, pišemo $A \sim B$, i kažemo da su A i B *ekvivalentne* matrice. S obzirom da su elementarne red i kolona operacije u stvari množenje redom sa lijeve i desne strane elementarnim matricama može se dokazati da

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad PAQ = B \text{ za nesingularne } P \text{ i } Q$$

(ii) Kadgod se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo red operacije, pišemo $A \overset{red}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *red ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad PA = B \text{ za nesingularnu } P.$$

(iii) Kad god se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo niz uzastopnih kolona operacija, pišemo $A \overset{kol}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *kolona ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad AQ = B \text{ za nesingularnu } Q.$$

⋄

(0.07) Red ešelon oblik
Za $m \times n$ matricu E, sa redovima E_{i*} i kolonama E_{*j}, kažemo da je u red ešelon obliku ako sljedeća dva uslova vrijede:
(a) Ako su svi elementi reda E_{i*} jenaki nuli, tada su i svi elementi u redovima ispod E_{i*} jednaki nuli, tj. svi nula redovi su na dnu matrice.
(b) Ako se prvi nenula elemenat u E_{i*} nalazi na $j$toj poziciji, tada su svi elementi ispod i-te pozicije u kolonama E_{*1}, E_{*2},...,E_{*j} nule.
Ova dva uslova kažu da nenula elementi u ešelon obliku moraju ležati na ili iznad glavne linije stepenica čiji je početak u gornjem lijevom uglu matrice i postepeno pada prema dole desno. Pivoti su prvi nenula elementi u ešelon redovima. Tipična struktura za matricu koja je u red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje su pivoti zaokruženi.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⋄

(0.08) Rang matrice
Pretpostavimo da je matrica $A_{m\times n}$ pomoću red operacija svedena na red ešelon oblik E. *Rang* matrice A se definiše kao broj

$$\begin{aligned} rang(A) &= \text{broj pivota} \\ &= \text{broj nenula redova u } E \\ &= \text{broj osnovnih kolona u } A \end{aligned}$$

gdje su *osnovne kolone* od A definisane kao one kolone u A koje sadrže pivot pozicije. ⋄

(0.09) Reducirani red ešelon oblik
Za matricu $E_{m\times n}$ kažemo da je u *reduciranom red ešelon obliku* ako su sljedeća tri uslova ispunjena.
(i) E je u red ešelon obliku.
(ii) Prvi nenula elemenat u svakom redu (tj. svaki pivot) je 1.
(iii) Sve vrijednosti iznad svakog pivota su 0.
Tipična struktura za matricu u reduciranom red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje elementi označeni sa $*$ mogu biti ili nula ili nenula brojevi:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

(0.10) Saglasnost

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Posmatrajmo proširenu matricu oblika $[A|\boldsymbol{b}]$. Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saglasan linearni sistem.

▷ U red redukciji matrice, red sljedećeg oblika se nikad neće pojaviti

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & | & \alpha \end{pmatrix} \text{ gdje je } \alpha \neq 0$$

▷ $\boldsymbol{b}$ nije osnovna kolona matrice $[A|\boldsymbol{b}]$.
▷ $rang[A|\boldsymbol{b}] = rang(A)$.
▷ $\boldsymbol{b}$ je kombinacia osnovnih kolona u A. ◇

(0.11) Sažetak za homogene sisteme

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za homogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Nepoznate koje odgovaraju pozicijama osnovnih kolona (tj. pivot pozicijama) zovemo *osnovne varijable*, a nepoznate koje odgovaraju pozicijama neosnovnih kolona zovemo *slobodne varijable*.

(b) Postoji tačno r osnovnih varijabli i $n - r$ slobodnih varijabli.

(c) Da bi opisali sva rijěšenja, matricu A reduciramo na red ešelon oblik koristeći Gausovu eliminaciju, i poslije toga vraćamo zamjenu da bi rješenje za osnovne varijable prikazali pomoću slobodnih varijabli. Ovo nam daje *opšte rijěšenje* koje je u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

gdje su članovi $x_{f_1}, x_{f_2}, ..., x_{f_n}$ slobodne varijable i gdje $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_{n-r}$ su $n \times 1$ kolone koje predstavljaju određeno rješenje homogenog sistema. Kolone $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika koji se koristi u procesu zamjene. Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, opšte rješenje generiše sva moguća rješenja.

(d) Homogeni sistem posjeduje jedinstveno rješenje (trivijalno rješenje) ako i samo ako $rang(A) = n$ - tj., ako i samo ako nema slobodnih varijabli.

◇

(0.12) Sažetak za nehomogeni sistem

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za nehomogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, neka je $[A|\boldsymbol{b}]$ proširena matrica i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Svodeći $[A|\boldsymbol{b}]$ na red ešelon oblik, pa koristeći Gausove eliminacije, i na kraju izražavajući osnoven varijable u smislu slobodnih varijabli, (sve ovo) nas vodi prema *opštem rješenju*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, ovo opšte rješenje generiše sva moguća rješenja sistema.

(b) Kolona $\boldsymbol{p}$ je u stvari partikularno rješenje nehomogenog sistema.

(c) Izraz $x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$ je opšte rješenje pridruženog homogenog sistema.

(d) Kolona $\boldsymbol{p}$, kao i kolona $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika u koji se $[A|\boldsymbol{b}]$ reducira.

(e) Sistem posjeduje jedinstveno rješenje ako i samo ako su sljedeće tvrdnje tačne:
▷ $rang(A) = n =$ broj nepoznatih.
▷ Ne postoje slobodne varijable.
▷ Pridruženi homogeni sistem posjeduje samo trivijalno rješenje. ◇

Kroneker-Kapelijeva metoda

Neka je dat sistem linearnih jednačina $Ax=b$, gdje su

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad i \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matricu $\overline{A}=[A \mid b]$ zovemo proširena matrica.

Teorema (Kroneker-Kapeli):

Sistem ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = n$ (n broj nepoznatih).

Ako je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} < n$ tada sistem ima ∞ mnogo rješenja. ($n - \operatorname{rang} A$ nepoznatih uzima se proizvoljno)

Ako je $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \overline{A}$ tada sistem nema rješenja.

1. Kroneker-Kapelijevom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x+4y-5z&=-5 \\ -x-y+z&=0 \\ 2x+y-z&=1. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A}=[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{}{\overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v\cdot 2}{\overset{II_v + I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$
sistem ima jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} -x-y+z&=0 \\ -y+z&=1 \\ -z&=-3 \end{aligned}$$
$$z=3$$

$$\begin{aligned} -x-y&=-3 \\ -y&=-2 \end{aligned}$$
$$y=2$$

$$-x-2=-3$$
$$x=1$$

Rješenje sistema je uređena trojka $(1,2,3)$.

2. Kroneker-Kapelijevom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1 \\ 3x_1+x_2-x_3&=3 \\ 2x_1+x_2 \quad &=2. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A}=[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v\cdot 2}{\overset{II_v - I_v\cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v - II_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2 < 3$
sistem ima ∞ mnogo rješenja
3-2 nepoznatih uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned} x_3&=t \\ -x_2-2x_3&=0 \\ x_1+x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2-2t&=0 \\ x_2&=-2t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1-2t+t&=1 \\ x_1&=t+1 \end{aligned}$$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t+1, -2t, t)$ gdje je $t\in\mathbb{R}$.

3. Kroneker-Kapelijevom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1 \\ 2x+4y+6z&=2 \\ 3x+6y+9z&=5. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A}=[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v\cdot 3}{\overset{II_v - I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} A = 1$, $\operatorname{rang} \overline{A} = 2$, $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \overline{A}$

sistem nema rješenja.

4. Kroneker-Kapelijevom metodom diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1 \\ x+\lambda y+z&=2 \\ x+y+\lambda z&=-3. \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$ sistem ima jedinstveno rješenje $\left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}, \frac{-3}{\lambda-1}\right)$

za $\lambda=-2$ sistem ima ∞ mnogo rješenja $\left(\frac{3t-4}{3}, \frac{3t-5}{3}, t\right)$, $t\in\mathbb{R}$

za $\lambda=1$ sistem nema rješenja

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\overline{C} = [C \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & \lambda \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & \lambda - 30 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 68 \end{array}\right]$$

1° $\lambda - 68 \neq 0$, $\lambda \neq 68$: $\quad \text{rang}\, C = 2$, $\text{rang}\, \overline{C} = 3$, $\quad \text{rang}\, C < \text{rang}\, \overline{C}$. Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenje.

2° $\lambda - 68 = 0$, $\lambda = 68$: $\quad \text{rang}\, C = \text{rang}\, \overline{C} = 2 < 4$ (broj nepoznatih)

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi dvije promjenjive uzimamo proizvoljno, npr. $x_4 = t$, $x_1 = s$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ -8x_3 + 17x_4 &= -38 \end{aligned}$$

$x_4 = t$

$-8x_3 + 17t = -38$

$-8x_3 = -17t - 38$

$x_3 = \frac{17}{8}t + \frac{38}{8} = \frac{17}{8}t + \frac{19}{4}$

$x_1 = s$

$2s - x_2 + 3\left(\frac{17}{8}t + \frac{38}{8}\right) - 7t = 15$

$x_2 = \frac{51t}{8} + \frac{114}{8} + 2s - 7t - 15$

$x_2 = -\frac{5}{8}t - \frac{6}{8} + 2s$

$x_2 = 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4}$

Za $\lambda = 68$ rješenje sistema je

$\left(s,\ 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4},\ \frac{17}{8}t + \frac{19}{4},\ t\right)$, $t, s \in \mathbb{R}$

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\overline{B} = [B \mid b] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \overset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \end{array}\right] \overset{\substack{II_v - I_v \cdot 3 \\ III_v - I_v \cdot 2 \\ IV_v - I_v \cdot 4}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 8 & 1 \end{array}\right] \underset{IV_v - II_v}{\overset{III_v - II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 8 & 0 \end{array}\right]$$

1° za $\lambda = 8$ imamo $\text{rang}\, B = \text{rang}\, \overline{B} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1 = t$, $x_4 = s$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_3 + 0x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$x_3 = -1$

$2t + 3x_2 - 2 + 2s = 2$

$3x_2 = 4 - 2t - 2s$

$x_2 = \frac{2}{3}(2 - t - s)$

Rješenje sistema (za $\lambda = 8$) je $\left(t,\ \frac{2}{3}(2 - t - s),\ -1,\ s\right)$ gdje su $s, t \in \mathbb{R}$.

2° za $\lambda \neq 8$ imamo $\text{rang}\, B = \text{rang}\, \overline{B} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = t$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_3 &= 1 \\ (\lambda - 8)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$x_4 = 0$

$x_3 = -1$

$2x_1 + 3t - 2 = 2$

$2x_1 = 4 - 3t$

$x_1 = 2 - \frac{3}{2}t$

Rješenje sistema (za $\lambda \neq 8$) je $\left(2 - \frac{3}{2}t,\ t,\ -1,\ 0\right)$ gdje su $t \in \mathbb{R}$.

(#) Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{II_v \leftrightarrow I_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{I_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array} \underset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} II_v - I_v \cdot 3 \\ III_v - I_v \cdot 2 \\ \sim \\ IV_v - I_v \cdot 4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9 \end{array}\right] \underset{II_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] \end{array} \underset{III_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} III_v - II_v \cdot 2 \\ IV_v - II_v \cdot 3 \\ \sim \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Za $\lambda = 8$ imamo $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja.
2. promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$ $x_1 = s$

$$\begin{aligned} -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 2s + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 2s + 9 - 6t + 4t - 5$

$x_2 = 2s - 2t + 4$

Za $\lambda = 8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t, s \in \mathbb{R}$

b) Za $\lambda \neq 8$ imamo $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.
1. (jednu) promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$

$$\begin{aligned} (\lambda - 8)x_1 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 9 - 6t + 4t - 5 = -2t + 4$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

Homogeni sistemi linearnih jednačina

Homogeni sistem linearnih jednačina je oblika $A \cdot x = 0$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad i \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Teorema: Homogeni sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D = 0$ $(\det A = 0)$.

1. Riješiti homogeni sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad (2) \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Rj. (1)+(2)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$4x_1 + 2x_2 = 0$ $/:2$

$2x_1 + x_2 = 0$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

$x_2 = -2x_1$

$x_1 = t$, $x_2 = -2t$, $t \in \mathbb{R}$

$t - 2t + x_3 = 0$

$x_3 = t$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t, -2t, t)$

2. Naći λ tako da sistem

$$\begin{aligned} 3x + y + \lambda z &= 0 \\ 4x - 8y + \lambda z &= 0 \\ 5x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalna rješenja pa naći rješenja.

Rj.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 4 & -8 & \lambda \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot 3}{\overset{II_v + I_v \cdot 8}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 28 & 0 & 9\lambda \\ 14 & 0 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 28 & 9\lambda \\ 14 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = (-14) \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -42(-\lambda+2)$$

Za $\lambda = 2$ $(D = 0)$ u sistemu postoje netrivijalna rješenja.

Sistem sad izgleda:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 0 \quad /\cdot 3 \\ 4x - 8y + 2z &= 0 \quad /\cdot 3 \\ 5x - 3y + 3z &= 0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 3y + 6z &= 0 \quad (1) \\ 12x - 24y + 6z &= 0 \quad (2) \\ 10x - 6y + 6z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)-(1): \quad x - 9y &= 0 \\ (2)-(1): \quad 3x - 27y &= 0 \quad /:3 \\ x - 9y &= 0 \end{aligned}$$

$x = 9y$, $z = -14y$ postoji ∞ mnogo rješenja

$(9t, t, -14t)$, $t \in \mathbb{R}$ su rješenja sistema

3. Za koje vrijednosti λ sistem ima netrivijalna rješenja

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda = 1$ ili $\lambda = -3$

Pronalaženje inverzne matrice uz pomoć Gauss-Jordan-ovih eliminacija

Posmatrajmo neku proizvoljnu matricu A.

Gauss-Jordan-ove operacije definisane na proizvoljnoj matrici su

(i) množenje proizvoljnog reda matrice brojem različitim od 0

(ii) dodavanje reda i matrice, pomnožen nekim brojem, redu j $(i \neq j)$

Ako je B matrica dobijena iz A pomoću Gauss-Jordanovih operacija pišemo

$$A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} B$$

Vrijedi sljedeća teorema

Teorem (računanje inverza)

Za inverznu matricu matrice A vrijedi sljedeća redukcija

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I \mid A^{-1}].$$

Ova redukcija neće raditi jedino u slučaju ako se pojavi red nula na lijevoj strani u matrici A, a ovo će se pojaviti ako i samo ako je A singularna matrica. Drugačiji (i nekako mnogo praktičniji) algoritam za pronalaženje inverzne matrice je pomoću LU faktorizacije.

Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rj.

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II_v + I_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)}$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj.

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + III_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\# Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj.

$$[P \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III_v + I_v \cdot (-1)]{II_v + I_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + III_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

LU faktorizacija

Ako je A $n \times n$ matrica taka da se primjenom elementarnih red operacija nikad ne može pojaviti nula pivot, tada se A može faktorisati kao proizvod $A = LU$, gdje sljedeće osobine važe:

(i) L je donje trougaona a U je gornje trougaona matrica

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) $l_{ii} = 1$ i $u_{ii} \neq 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$

(iii) Ispod dijagonale od L, vrijednost l_{ij} je negativni množilac reda j koji smo dodali redu i sa ciljem eliminisanja (i,j) pozicije prilikom primjene elementarne red operacije tipa III.

(iv) U je konačan rezultat primjene konačno mnogo elementarnih red operacija tipa III primjenjenih na A.

(v) Matrice L i U su jedinstveno određene sa osobinama (i) i (ii).

Dekompoziciju od A u $A = LU$ zovemo <u>LU faktorizacija od A</u>, a matrice L i U zovemo <u>LU faktori od A</u>.

Odrediti LU faktorizaciju matrice A
(tj. odrediti matrice L i U takve da $A=L\cdot U$)
gdje je
$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&7&7\\6&18&22\end{pmatrix}.$$

Rj: Svedimo matricu A na gornje trougaoni oblik primjenom Gauss-Jordanovih operacija

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&7&7\\6&18&22\end{pmatrix}\xrightarrow[III_v+I_v\cdot(-3)]{II_v+I_v\cdot(-2)}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&3&3\\0&12&16\end{pmatrix}\xrightarrow{III_v+II_v\cdot(-4)}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&3&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Prema tome
$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}\quad \text{i} \quad U=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&3&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&7&7\\6&18&22\end{pmatrix}=L\cdot U=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&3&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Odrediti LU faktorizaciju matrice A
$$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{pmatrix}.$$

Rj:
$$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{pmatrix}\xrightarrow[III_v+I_v\cdot(-3)]{II_v+I_v\cdot(-4)}\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&4&15\end{pmatrix}\xrightarrow{III_v+II_v\cdot(-2)}\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Prema tome
$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$A=LU$.

$II_v+I_v\cdot(-4)$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$III_v+I_v\cdot(-3)$ $\qquad$ $III_v+II_v\cdot(-2)$

\# Primjenom LU faktorizacije izračunati inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix}3&4&4\\1&6&1\\2&3&3\end{bmatrix}$.

Rj.:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&4\\1&6&1\\2&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[III_v+I_v\cdot(-\frac{2}{3})]{II_v+I_v\cdot(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}3&4&4\\0&14/3&-1/3\\0&1/3&1/3\end{pmatrix}\xrightarrow{III_v+II_v\cdot(-\frac{1}{14})}\begin{pmatrix}3&4&4\\0&14/3&-1/3\\0&0&5/14\end{pmatrix}$$

$6-\frac{4}{3}=\frac{18-4}{3}$ $\quad 3-\frac{8}{3}=\frac{9-8}{3}$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{14}{3}\cdot(-\frac{1}{14})$

$1-\frac{4}{3}=\frac{3-4}{3}$ $\quad 3-\frac{8}{3}$ $\quad 1/3+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{14}=\frac{14+1}{3\cdot 14}=\frac{15}{3\cdot 14}=\frac{5}{14}$

$$A=L\cdot U,\quad L=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\2/3&1/14&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}3&4&4\\0&14/3&-1/3\\0&0&5/14\end{pmatrix}$$

Sad iskoristimo ovu faktorizaciju i riješimo matričnu jednačinu $AX=I$ (rješenjem ćemo dobiti A^{-1})

$$A\cdot X=A\cdot\begin{bmatrix}|&|&|\\x_1&x_2&x_3\\|&|&|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|&|&|\\e_1&e_2&e_3\\|&|&|\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{bmatrix}Ax_1&Ax_2&Ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1&e_2&e_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}LUx_1&LUx_2&LUx_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1&e_2&e_3\end{bmatrix}$$

Uvedimo smjenu $y_1=Ux_1$, $y_2=Ux_2$, $y_3=Ux_3$ i riješimo

$[Ly_1\ Ly_2\ Ly_3]=[e_1\ e_2\ e_3]$ gdje su nepoznate y_1,y_2,y_3.

$Ly_1=e_1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\2/3&1/14&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}&y_{11}=1\\&\tfrac{1}{3}y_{11}+y_{21}=0\Rightarrow y_{21}=-\tfrac{1}{3}\\&\tfrac{2}{3}y_{11}+\tfrac{1}{14}y_{21}+y_{31}=0\Rightarrow y_{31}=-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{14\cdot 3}\end{aligned}$$

$y_1=\begin{pmatrix}1\\-1/3\\-9/14\end{pmatrix}$ slično $y_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1/14\end{pmatrix}$, $y_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Sad riješimo sisteme $y_1=Ux_1$, $y_2=Ux_2$, $y_3=Ux_3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1/3\\-9/14\end{pmatrix}}_{y_1}=\underbrace{\begin{pmatrix}3&4&4\\0&14/3&-1/3\\0&0&5/14\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}}_{x_1}$$

$$\begin{aligned}3x_{11}+4x_{21}+4x_{31}&=1\\ \tfrac{14}{3}x_{21}-\tfrac{1}{3}x_{31}&=-\tfrac{1}{3}\\ \tfrac{5}{14}x_{31}&=-\tfrac{9}{14}\Rightarrow x_{31}=-\tfrac{9}{5}\end{aligned}$$

$$\frac{14}{3}x_{21}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{14}{3}x_{21}=-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=\frac{-5-9}{15}=-\frac{14}{15}$$

$$x_{21}=-\frac{1}{5}\Rightarrow 3x_{11}-\frac{4}{5}-\frac{36}{5}=1\Rightarrow \underbrace{3x_{11}=1+8}_{\Rightarrow x_{11}=3}$$

Prema tome $x_1=\begin{pmatrix}3\\-1/5\\-9/5\end{pmatrix}$. Slično $x_2=\begin{pmatrix}0\\1/5\\-1/5\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}-4\\1/5\\14/5\end{pmatrix}$

Prema tome $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&-4\\-1/5&1/5&1/5\\-9/5&-1/5&14/5\end{pmatrix}$

Vektorski prostori

1. Vektorski prostor i podprostor

(1.01) Definicija vektorskog prostora

Skup $\mathcal{V}$ zovemo *vektorski prostor nad* $\mathbb{F}$ kada operacije vektorsko sabiranje i skalarno množenje zadovoljavaju sljedeće osobine.

(A1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo *zatvorenost za vektorsko sabiranje*.

(A2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ za svaki $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$.

(A3) Postoji element $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(A4) Za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, postoji element $(-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

(A5) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$.

(Osobine (A1)-(A5) u stvari govore da je uređen par $(\mathcal{V},+)$ Abelova grupa.)

(M1) $\alpha \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo *zatvorenost za skalarno množenje*.

(M2) $(\alpha \beta) \boldsymbol{x}=\alpha(\beta \boldsymbol{x})$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(M3) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}$ za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ i sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$.

(M4) $(\alpha+\beta) \boldsymbol{x}=\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{x}$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(M5) $1 \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. $\diamond$

(1.02) Vektorski podprostor

Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ (simbolički, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$). Ako je $\mathcal{S}$ također vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ pod istim operacijama sabiranja i skalarnog množenja, tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je *podprostor* od $\mathcal{V}$. Nije potrebno provjeriti svih 10 osobina iz definicije vektorskog prostora da bi odredili da li je dati podskup vektorski podprostor - trebaju se provjeriti jedino osobine zatorenosti (A1) i (M1). Tj. neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je podprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako

(A1) $\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{S} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$

i

(M1) $\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$. $\diamond$

(1.03) Spljoštenost

Iako ne možemo koristiti oči da bi vidjeli ”spljoštenost” u višim dimenzijama (u dimenzijama vektorskog prostora većem od 3), naš um to može sebi predstaviti kroz smisao podprostora. Od sad pa nadalje, uvijek zamislite spljoštenu površ koja prolazi kroz koordinatni početak kad god naiđemo na pojam ”podprostora”. $\diamond$

(1.04) Generatori

(i) Za skup vektora $\mathcal{S}=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$, podprostor

$$\mathit{span}(\mathcal{S})=\{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1+\alpha_2 \boldsymbol{v}_2+\ldots+\alpha_r \boldsymbol{v}_r : \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

generisan pomoću svih mogućih linearnih kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$ zovemo *prostor generisan pomoću* $\mathcal{S}$.

(ii) Ako je $\mathcal{V}$ vektorski prostor takav da $\mathcal{V}=\mathit{span}(\mathcal{S})$, kažemo da je $\mathcal{S}$ generator za $\mathcal{V}$. Drugim riječima $\mathcal{S}$ generiše $\mathcal{V}$ kadgod se svaki vektor iz $\mathcal{V}$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$. $\diamond$

(1.05) Suma podprostora

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada je *suma* od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ definisana kao skup svih mogućih suma vektora iz $\mathcal{X}$ sa vektorima iz $\mathcal{Y}$. Tj.

$$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}.$$

(i) Suma $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ je podprostor od $\mathcal{V}$.

(ii) Ako $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generišu redom $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$. $\diamond$

Odrediti da li je skup

$$V = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

vektorski prostor, ako su vektorsko sabiranje i skalarno množenje definisani na sljedeći način:

$$(VS) \quad + : \quad (x,y)+(a,b) = (x+a, y+b) \quad \text{za } \forall (x,y),(a,b) \in V$$

$$(SM) \quad \cdot : \quad \alpha(x,y) = (\alpha y, \alpha x) \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V.$$

Rj. Prema definiciji, da bi pokazali da je V vektorski prostor, trebamo pokazati da vrijedi

(A1)-(A5) $(V,+)$ je Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,y) \in V$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

(M2) $(\alpha\beta)(x,y) = \alpha(\beta(x,y))$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, (x,y) \in V$

(M3) $\alpha[(x,y)+(a,b)] = \alpha(x,y)+\alpha(a,b)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(a,b) \in V$

(M4) $(\alpha+\beta)(x,y) = \alpha(x,y)+\beta(x,y)$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

(M5) $1\cdot(x,y) = (x,y)$ za $\forall$

Pa krenimo redom

(A1) ZATVORENOST $(x,y)+(a,b) \in V$ za $\forall (x,y),(a,b) \in V$

$$(x,y)+(a,b) = (\underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y+b}_{\in\mathbb{R}}) \in V \qquad \text{vrijedi (A1)}$$

(A2) ASOCIJATIVNOST $[(x,y)+(a,b)]+(m,n) = (x,y)+[(a,b)+(m,n)]$ za $\forall (a,b),(x,y),(m,n) \in V$

$$[(x,y)+(a,b)]+(m,n) = [x+a, y+b]+(m,n) = ((x+a)+m, (y+b)+n) =$$

$$= (x+(a+m), y+(b+n)) = (x,y)+(a+m, b+n) = (x,y)+[(a,b)+(m,n)]$$

vrijedi (A2)

(A3) NEUTRALNI ELEMENT $\exists (e,f) \in V$ t.d. $(e,f)+(x,y) = (x,y)$ za $\forall (x,y) \in V$

Prema definiciji vektorskog sabiranja odmah vidimo da je $(e,f) = (0,0)$ neutralni element

(A4) INVERZNI ELEMENT $\forall (x,y) \in V \; \exists (x',y') \in V \; (x,y)+(x',y') = (0,0)$

Nije teško vidjeti da je inverzni element $(x',y') = (-x,-y)$.

(A5) KOMUTATIVNOST $(x,y)+(a,b) = (a,b)+(x,y) \quad \forall (x,y),(a,b) \in V$

$$(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b) = (a+x, b+y) = (a,b)+(x,y)$$

vrijedi (A5)

$(V,+)$ jest Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,y) \in V$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

$$\alpha(x,y) = (\underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}}) \in V \qquad \text{vrijedi (M1)}$$

(M2) $(\alpha\beta)(x,y) = \alpha(\beta(x,y))$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

$$(\alpha\beta)(x,y) = ((\alpha\beta)y, (\alpha\beta)x) = (\alpha(\beta y), \alpha(\beta x)) =$$

$$= \alpha(\beta x, \beta y) = \alpha(\beta(y,x))$$

Osobina (M2) ne vrijedi

Skup V nije vektorski prostor.

Napomena: Nije teško dokazati da

- skup $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih realnih matrica je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$
- skup $Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ svih kompleksnih matrica je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.
- skup $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Svakom vektorskom prostoru je pridruženo vektorsko sabiranje i skalarno množenje. U sve tri slučaja vektorsko sabiranje se odnosi na uobičajeno sabiranje matrica a skalarno množenje je obično množenje matrice brojem.

Ako sabiranje f-ja i skalarno množenje definisano sa

$$(VS) \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (SM) \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

tada nije teško pokazati da su sljedeći skupovi vektorski prostori nad $\mathbb{R}$

- skup svih f-ja koje preslikavaju interval $[0,1]$ u $\mathbb{R}$;
- skup svih neprekidnih realno vrijednosnih f-ja definisanih na $[0,1]$.

(#) Pokazati da je skup

$$\mathcal{V} = \{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

vektorski prostor ako su vektorsko sabiranje i skalarno množenje definisani na sljedeći način

(VS) $+: \quad (x,x,y) + (a,a,c) = (x+a, x+a, y+c) \quad \forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V}$.

(SM) $\cdot: \quad \alpha \cdot (x,x,y) = (\alpha x, \alpha x, \alpha y)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$.

Rj. Da bi pokazali da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor, prema definiciji trebamo pokazati da

ovaj zadatak ostavi za vježbu

(A1-A5) $(\mathcal{V}, +)$ Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,x,y) \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M2) $(\alpha\beta)(x,x,y) = \alpha(\beta(x,x,y)) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M3) $\alpha[(x,x,y) + (a,a,b)] = \alpha(x,x,y) + \alpha(a,a,b)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall (x,x,y), (a,a,b) \in \mathcal{V}$

(M4) $(\alpha+\beta)(x,x,y) = \alpha(x,x,y) + \beta(x,x,y)$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M5) $1(x,x,y) = (x,x,y)$ za $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

Pa krenimo redom. Pokažimo da je $(\mathcal{V}, +)$ Abelova grupa:

(A1) ZATVORENOST $\forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V} \quad (x,x,y) + (a,a,c) \in \mathcal{V}$

$$(x,x,y) + (a,a,c) = (\underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y+c}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathcal{V}$$ (prva i druga koordinata su iste)

vrijedi zatvorenost

(A2) ASOCIJATIVNOST $\forall (x,x,y), (a,a,c), (m,m,n) \in \mathcal{V} \quad [(x,x,y)+(a,a,c)] + (m,m,n) = (x,x,y) + [(a,a,c)+(m,m,n)]$

$$[(x,x,y) + (a,a,c)] + (m,m,n) = (x+a, x+a, y+c) + (m,m,n) =$$
$$= ((x+a)+m, (x+a)+m, (y+c)+n) = (x+(a+m), x+(a+m), y+(c+n)) =$$
$$= (x,x,y) + (a+m, a+m, c+n) = (x,x,y) + [(a,a,c) + (m,m,n)]$$

vrijedi asocijativnost

(A3) NEUTRALNI ELEMENT $\exists (e,e,f) \in \mathcal{V}$ t.d. $(x,x,y) + (e,e,f) = (x,x,y)$

Odmah se vidi da je $(e,e,f) = (0,0,0)$ neutralni element. za $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(A4) INVERZNI ELEMENT $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V} \ \exists (x',x',y') \in \mathcal{V}$ t.d. $(x,x,y) + (x',x',y') = (0,0,0)$

Iz definicije vektorskog sabiranja odmah vidimo da je $(x',x',y') = (-x, -x, -y)$ inverzni element za (x,x,y)

(A5) KOMUTATIVNOST $\forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V} \quad (x,x,y) + (a,a,c) = (a,a,c) + (x,x,y)$

$$(x,x,y) + (a,a,c) = (x+a, x+a, y+c) = (a+x, a+x, c+y) = (a,a,c) + (x,x,y)$$

vrijedi komutativnost

Prema tome $(\mathcal{V}, +)$ jest Abelova grupa

(M1) ZATVORENOST SKALARNOG MNOŽENJA $\alpha(x,x,y) \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

$$\alpha(x,x,y) = (\underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathcal{V}$$ (prva i druga koordinata su jednake)

vrijedi (M1)

(M2) $(\alpha\beta)(x,x,y) = \alpha(\beta(x,x,y)) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

$$(\alpha\beta)(x,x,y) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) =$$
$$= \alpha(\beta x, \beta x, \beta y) = \alpha(\beta(x,y,z))$$ vrijedi (M2)

(M3) PRVI DISTRIBUTIVNI ZAKON $\alpha[(x,x,y) + (a,a,c)] = \alpha(x,x,y) + \alpha(a,a,c)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V}$

$$\alpha[(x,x,y) + (a,a,c)] = \alpha(x+a, x+a, y+c) = (\alpha(x+a), \alpha(x+a), \alpha(y+c)) =$$
$$= (\alpha x + \alpha a, \alpha x + \alpha a, \alpha y + \alpha c) = (\alpha x, \alpha x, \alpha y) + (\alpha a, \alpha a, \alpha c)$$
$$= \alpha(x,x,y) + \alpha(a,a,c)$$ vrijedi (M3)

(M4) DRUGI DISTRIBUTNNI ZAKON $(\alpha+\beta)(x,x,y) = \alpha(x,x,y) + \beta(x,x,y)$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \ \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

za vježbu pokazati da vrijedi (M4)

(M5) $1(x,x,y) = (x,x,y) \quad \forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

$$1(x,x,y) = (1\cdot x, 1\cdot x, 1\cdot y) = (x,x,y)$$ vrijedi (M5).

Prema tome $\mathcal{V}$ jest vektorski prostor.

Zašto realan ili kompleksan nenula vektorski prostor mora sadržavati beskonačan broj vektora?

Rj. Ako je $v \in V$ nenula vektor u vektorskom prostoru V, tada svako skalarno množenje αv pripada prostoru V. Kako je $\alpha \in \mathbb{R}$ (ili $\alpha \in \mathbb{C}$) to V mora imati beskonačno mnogo vektora.

Da li su sljedeći skupovi, sa prikazanim operacijama, vektorski prostori? Ako nisu, zašto nisu?

a) Skup $\mathbb{R}_0^+$ nenegativnih realnih brojeva, sa uobičajenim sabiranjem i skalarnim množenjem.

b) Skup V svih polinoma stepena ≥ 3, zajedno sa 0; operacije sa polinomima (uobičajeno sabiranje polinoma, i množenje polinoma skalarom).

c) Skup V svih 2×2 matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, gdje su operacije iz $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$.

d) Skup V svih 2×2 matrica sa jednakom sumom elemenata u koloni; operacije iz $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$.

e) Skup V svih 2×2 matrica sa determinantom jednakoj 0; uobičajene matrične operacije

f) Skup V realnih brojeva; uobičajene operacije.

g) Skup V svih uređenih parova (x,y) sa sabiranjem na $\mathbb{R}^2$, ali skalarnim množenjem $\alpha(x,y)=(x,y)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

h) Skup V svih f-ja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa tačkastim sabiranjem $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall f,g$ i skalarnim množenjem koje je definisano sa $(\alpha f)(x)=f(\alpha x)$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ i $\forall x\in\mathbb{R}$.

IZABRANI ODGOVORI: b) NE, samo (A1) nije ispunjen d) DA f) DA j) NE, samo (S3) nije ispunje

Pokazati da je skup $\mathcal{U}=\{(x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^2$.

Rj. Prema definiciji vektorskog podprostora $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ je vektorski podprostor akko je $\mathcal{U}$ neprazan skup i vrijedi:

(A1) $(x,-x),(a,-a)\in\mathcal{U} \Rightarrow (x,-x)+(a,-a)\in\mathcal{U}$

(M1) $(x,-x)\in\mathcal{U} \Rightarrow \alpha(x,-x)\in\mathcal{U}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\mathcal{U}$ je neprazan, zato što npr $(0,0)\in\mathcal{U}$

(A1) vrijedi zato što

$$(x,-x)+(a,-a)=(x+a,-x-a)=(\underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{-(x+a)}_{\in\mathbb{R}})\in\mathcal{U}$$

Kako je

$$\alpha(x,-x)=(\underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{-\alpha x}_{\in\mathbb{R}})\in\mathcal{U}$$ to vrijedi i osobina (M1).

$\mathcal{U}$ je vektorski prostor prostora $\mathbb{R}^2$

Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Pokazati da je $\mathcal{U}=\{0\}$ podprostor od V.

Rj. $\mathcal{U}$ je neprazan $(0\in\mathcal{U})$

(A1) $x,y\in\mathcal{U} \Rightarrow x+y\in\mathcal{U}$

Ako izaberemo proizvoljne $x,y\in\mathcal{U}$ ovi x i y moraju biti 0

$0+0=0\in\mathcal{U}$ vrijedi (A1)

(M1) $x\in\mathcal{U} \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{U}$ $\forall\alpha\in\mathbb{F}$

Za proizvoljno $x\in\mathcal{U}$ ovaj x mora biti 0.

$\alpha 0=0$ vrijedi M1

$\{0\}$ je vektorski podprostor prostora V

Neka je A $m\times n$ matrica. Posmatrajmo skup

$$\mathcal{U}=\left\{ Ax \mid x\in\mathbb{R}^n,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^m$ (skup $\mathcal{U}$ zovemo rang matrice A)

Rj. Prema definiciji da bi pokazali da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^m$ trebamo pokazati da je $\mathcal{U}$ neprazan skup i da vrijede osobine

(A1) $Ax, Ay\in\mathcal{U} \Rightarrow Ax+Ay\in\mathcal{U}$

(M1) $Ax \Rightarrow \alpha Ax\in\mathcal{U}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Primjetimo da

$$Ax=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square\\\square\\\vdots\\\square\end{bmatrix}_{m\times1}\in\mathbb{R}^m$$

Ako za x uzmemo vektor $0=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ tada $A0=0$

pa skup $\mathcal{U}$ nije prazan.

Pokažimo (A1)

$$Ax, Ay\in\mathcal{U} \Rightarrow Ax+Ay=A\underbrace{(x+y)}_{=z}=Az\in\mathcal{U}$$

vrijedi (A1)

Pokažimo (M1)

$$Ax\in\mathcal{U} \Rightarrow \alpha Ax=A(\alpha x)=A\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{bmatrix}}_{=w}=Aw\in\mathcal{U}$$

vrijedi (A2)

$\mathcal{U}$ je vektorski podprostor od $\mathbb{R}^m$

Dat je vektorski prostor $P[x]$, prostor svih polinoma $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, $a_i\in\mathbb{R}$, proizvoljnog stepena. Posmatrajmo podskup $\mathcal{U}$ skupa svih polinoma iz $P[x]$ koji ima 3 kao korijen

$$\mathcal{U}=\{p(x)\in P[x] \mid p(3)=0\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $P[x]$.

Rj. Prema definiciji, da bi dokazali da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $P[x]$ trebamo dokazati da je $\mathcal{U}$ neprazan skup i da vrijedi

(A1) $p(x), q(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow (p+q)(x)\in\mathcal{U}$

(M1) $p(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow \alpha p(x)\in\mathcal{U}$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Polinom $p(x)=x-3$ pripada skupu $\mathcal{U}$ zato što je $p(3)=0$ pa $\mathcal{U}$ nije prazan.

Pokažimo (A1)

$p(x), q(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow p(3)=0$ i $q(3)=0$

$(p+q)(0)=p(0)+q(0)=0+0=0 \Rightarrow$ vrijedi (A1)

Pokažimo (M1)

$p(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow p(3)=0$

$\alpha p(0)=\alpha\cdot 0=0 \Rightarrow \alpha p(x)\in\mathcal{U}$

vrijedi (M1)

$\mathcal{U}$ je vektorski podprostor prostora $P[x]$.

(#) Dat je skup $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ na kojem je definisano vektorsko sabiranje $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ i skalarno množenje $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Od ranije je poznato da je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor. Diskutovati koji od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}^n$ su u stvari vektorski podprostori od $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$.

a) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$

b) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$

c) $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b$, gdje je A nenula matrica oblika $m \times n$ i b nenula matrica oblika $m \times 1\}$

Rj. Znamo da je neprazan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$ akko

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

Odmah primjetimo da je svaki od datih skupova neprazan pa to nećemo ispitivati.

a) $x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = (\underbrace{x_1+y_1}_{\geq 0}, \underbrace{x_2+y_2}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{x_n+y_n}_{\geq 0}) \Rightarrow x+y \in \mathcal{A}$

vrijedi (A1)

$x \in \mathcal{A} \Rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$-1 \in \mathbb{R}$ $\quad (-1)(x) = (\underbrace{-x_1}_{\leq 0}, \underbrace{-x_2}_{\leq 0}, \dots, \underbrace{-x_n}_{\leq 0}) \Rightarrow -x \notin \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ nije vektorski podprostor

b) $x, y \in \mathcal{B} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = (0+0, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \in \mathcal{B}$ vrijedi (A1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = (0, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{B} \Rightarrow$ vrijedi (M1)

$\mathcal{B}$ jest vektorski podprostor

c) $x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $x_1 x_2 = 0$ i $y_1 y_2 = 0$

$(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2) = \underbrace{x_1 x_2}_{=0} + \underbrace{x_1 y_2 + y_1 x_2}_{=?} + \underbrace{y_1 y_2}_{=0}$ ne vrijedi (A1)

$\mathcal{C}$ nije vektorski podprostor

d) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

$x, y \in \mathcal{D} \Rightarrow x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0+0 = 0$ vrijedi (A1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ vrijedi (M1)

$\mathcal{D}$ jest vektorski podprostor

e) $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

$x, y \in \mathcal{E} \Rightarrow x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 1+1 = 2$ ne vrijedi (A1)

$\mathcal{E}$ nije vektorski podprostor

f) $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b$, A i b odgovarajuće matrice za koje sistem ima rješenje$\}$

$x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{array}{l} Ax = b \\ Ay = b \end{array}$ ali $A(x+y) = Ax + Ay = b + b = 2b$

$x+y \notin \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ nije vektorski podprostor

(#) Odrediti koji od sljedećih podskupova od $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ su u stvari podprostori od $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) simetrične matrice
b) dijagonalne matrice
c) nesingularne matrice
d) singularne matrice
e) trougaone matrice
f) gornje-trougaone matrice
g) sve matrice koje komutiraju sa datom matricom A
h) sve matrice kod kojih je $A^2=A$
i) sve matrice kod kojih je $trag(A)=0$.

Rj. Za sve date slučajeve trebamo ispitati aksiome (A1) i (M1) (iz same definicije primjetimo da je svaki dati skup neprazan, pa to nećemo ispitivati)

a) simetrične matrice

A simetrična matrica akko $A=A^T$

A,B simetrične matrice $\Rightarrow A^T=A,\ B^T=B \Rightarrow A+B=A^T+B^T=(A+B)^T$

$\Rightarrow A+B$ je simetrična matrica (vrijedi A1).

A simetrična matrica $\Rightarrow A^T=A \Rightarrow \alpha A=\alpha A^T \quad \forall \alpha\in\mathbb{F}$

$\Rightarrow \alpha A$ je simetrična matrica (vrijedi M1)

Skup svih simetričnih matrica formiraju podprostor vektorskog prostora $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

b) dijagonalne matrice

A dijagonalna matrica akko svi elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki 0

A,B dijagonalne matrice $\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A+B$ dijagonalna matrica (vrijedi A1)

A dijagonalna $\Rightarrow \alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha A$ dijagonalna (vrijedi M1)

Skup svih dijagonalnih matrica čine vektorski podprostor prostora $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

c) nesingularne matrice $\qquad \exists$ inverzna matrica A^{-1}

A je nesingularna matrica akko ($\det(A)\neq 0$)

Ako npr. uzmemo $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ tada

$\det(A)\neq 0,\ \det(B)\neq 0$ ali $\det(A+B)=0$

ne vrijedi A1

Skup svih singularnih matrica nije vektorski podprostor.

d) singularne matrice $\qquad$ ne postoji inverzna matrica

A singularna matrica akko ($\det(A)=0$).

Ako npr. uzmemo $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ imamo

$\det(A)=0,\ \det(B)=0$ ali $\det(A+B)=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$

ne vrijedi A1

Skup svih singularnih matrica ne formiraju vektorski podprostor.

e) trougaone matrice

A trougaona matrica akko elementi matrice iznad ili ispod glavne dijagonale su jednaki nuli.

Ako npr uzmemo

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ tada A i B su trougaone ali $A+B$ nije trougaona matrica

aksiom A1 ne vrijedi

Skup svih trougaonih matrica ne čini vektorski podprostor.

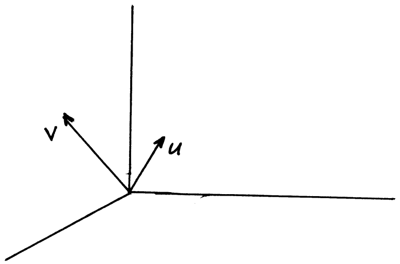
f) gornje-trougaona matrica

A gornje-trougaona matrica akko svi elementi ispod glavne dijagonale su jednaki nuli.

Završiti za vježbu

f) JEST $\quad$ g) JEST $\quad$ h) NIJE $\quad$ i) JEST

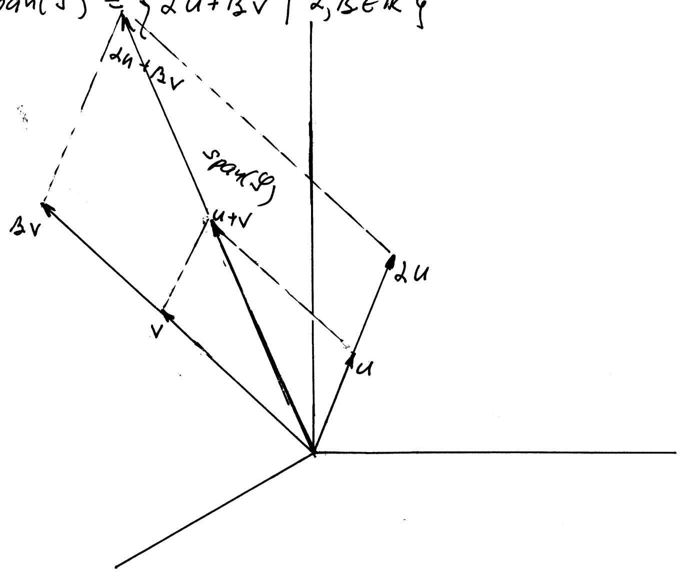
Dat je skup $\mathcal{S}=\{u,v\}$, koji sadrži dva vektora u i v, u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ (vidi sliku)



Šta geometrijski predstavlja $span(\mathcal{S})$?

Rj.

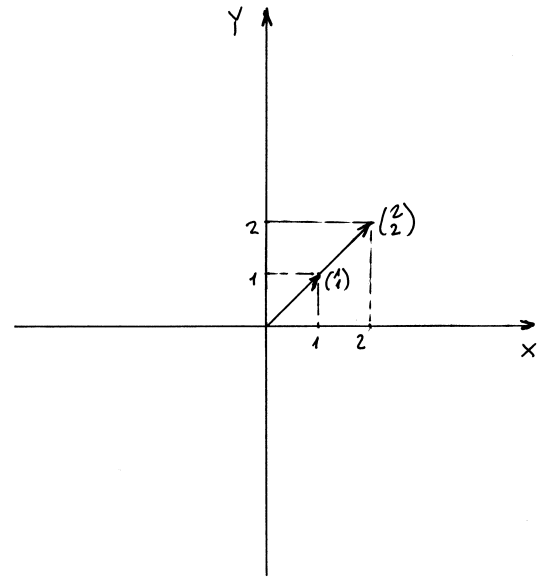
$$span(\mathcal{S}) = \{\alpha u+\beta v \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$



$span(\mathcal{S})$ geometrijski predstavlja ravan koja sadrži vektore u i v i koja prolazi kroz koordinatni početak.

Dat je skup $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$. Šta geometrijski predstavlja $span(\mathcal{S})$?

Rj.



$$span(\mathcal{S}) = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\2\beta\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\\alpha+2\beta\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} = \left| \begin{array}{l}\alpha+2\beta=\gamma\\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow \gamma\in\mathbb{R}\end{array}\right| =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

$span(\mathcal{S})$ predstavlja pravu $Y=X$ u $\mathbb{R}^2$.

Obrazložiti odgovore na sljedeća pitanja

a) Šta predstavlja $\text{span}\left\{ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$?

b) Šta predstavlja $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gdje su e_i jedinični vektori iz $\mathbb{R}^n$ ($e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ ← i-ta poz., ..., $e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$).

c) Šta predstavljaju $\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ i $\text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$.

Rj.

a)
$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} =$$
$$=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\} =$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3.$$

b)
$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\} =$$
$$=\{\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_n e_n \mid \alpha_i\in\mathbb{R}\} =$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_i\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^n$$

c)
$$\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\} =$$
$$=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \mid a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\} = \text{skup svih polinoma } p(x) \text{ stepena } \le n$$

$$\text{span}\{1, x, x^2, \dots\} = \{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \mid a_0,a_1,a_2,\dots\in\mathbb{R}\} = \text{skup svih polinoma}$$

Obrazložiti odgovor na pitanje da li skup

$\varphi=\{(1,1,1), (1,-1,-1), (3,1,1)\}$ generiše vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

Rj.

Postavimo vektore iz skupa φ kao vektor kolone tj.

$$\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\,\varphi=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

φ će generisati vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ akko $\text{span}\,\varphi=\mathbb{R}^3$ tj. ako se svaki vektor $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz φ.

Ako vektore iz φ-a postavimo kao kolone matrice A

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix} \quad \text{kako je} \quad \begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\alpha+\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\beta+\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}\gamma$$

to možemo zaključiti

φ generiše $\mathbb{R}^3$ akko $Ax=b$ ima rješenje za $\forall b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

Iz osnovne teorije linearne algebre

$Ax=b$ ima rješenje akko $\text{rang}(A)=\text{rang}(A \mid b)$.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix} \overset{III_v+II_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \overset{II_v+I_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&3\\0&-2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(A)=2$. Kako je b proizvoljan vektor $\text{rang}(A \mid b)=3$ $\Rightarrow$ sistem nema rješenje

Prema tome φ ne generiše vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

(#) Koji od sljedećih skupova generišu (granaju) $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1,1,1)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

c) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

d) $\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,1)\}$

e) $\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,0)\}$

Rj.
$$\mathbb{R}^3=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

a) $\mathcal{A}=\{(1,1,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{A}=\{\alpha(1,1,1)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$
$\mathcal{A}$ ne grana $\mathbb{R}^3$ npr. $(1,2,3)\notin\mathcal{A}$

b) $\mathcal{B}=\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{B}=\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,0,\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$
$\mathcal{B}$ ne grana $\mathbb{R}^3$ npr. $(2,2,2)\notin\mathcal{B}$

c) $\mathcal{C}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{C}=\{\underbrace{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)}_{=\mathbb{R}^3}+\delta\cdot(1,1,1)\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(\alpha+\delta,\beta+\delta,\gamma+\delta)\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}=\{(\eta,\mu,\theta)\mid\eta,\mu,\theta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3$$
$\mathcal{C}$ grana $\mathbb{R}^3$

d) Ako vektore iz skupa $\mathcal{D}=\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,1)\}$ stavimo kao kolone matrice A tada se pitanje da li $\mathcal{D}$ grana vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ svodi na pitanje da li sistem $Ax=b$

ima bar jedno rješenje za $\forall b\in\mathbb{R}^3$.
$$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

Zašto?

$\mathcal{D}$ grana $\mathbb{R}^3$ akko $\mathbb{R}^3=\operatorname{span}\mathcal{D}$ akko

$\forall b\in\mathbb{R}^3\ \exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ t.d.
$$b=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}4\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=Ax$$

Iz osnovne teorije linearne algebre sistem linearnih jednačina $Ax=b$ je saglasan sistem akko $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A\,|\,b)$.

Izračunajmo rang A
$$\begin{bmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&1\end{bmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\underset{III_v+I_v\cdot(-1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4\\0&-4&-4\\0&-3&-3\end{bmatrix}\overset{II_v:(-4)}{\underset{III_v:(-4)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$\operatorname{rang}(A)=2$. Kako je b proizvoljan $\operatorname{rang}(A\,|\,b)=3\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistem $Ax=b$ nije saglasan $\Rightarrow\mathcal{D}$ ne generiše $\mathbb{R}^3$

e) $\mathcal{E}=\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,0)\}$

Ako vektore iz $\mathcal{E}$ stavimo kao kolone matrice B prema primjedbi iz d) imamo

$\operatorname{span}\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$ akko sistem $Bx=b$ je saglasan sistem

gdje je $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&0\end{bmatrix}$
$$\det B=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&0\end{vmatrix}\overset{I_k-II_k}{=}\begin{vmatrix}3&2&4\\2&0&4\\0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\2&4\end{vmatrix}=12-8=4\neq0$$

$\mathcal{E}$ grana $\mathbb{R}^3$

Za dati skup vektora $\mathcal{S}=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ iz podprostora $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m$ neka je A matrica koja sadrži vektore a_i kao svoje kolone. Objasniti zašto $\mathcal{S}$ generiše $\mathcal{V}$ ako i samo ako za $\forall b\in\mathcal{V}$ postoji odgovarajuća kolona x takva da $Ax=b$ (tj. ako i samo ako $Ax=b$ je saglasan sistem za svako $b\in\mathcal{V}$).

Rj.

Prisjetimo se

$$\operatorname{span}\mathcal{S}\overset{\text{def}}{=}\{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n \mid \alpha_i\in\mathbb{F}\}$$

"$\Longrightarrow$" $\mathcal{S}$ grana $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{V}=\operatorname{span}\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ ($\Rightarrow \operatorname{span}\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\{\alpha_1a_1+\dots+\alpha_na_n \mid \alpha_i\in\mathbb{F}\}=\mathcal{V}$) $\forall b\in\mathcal{V}$ $\exists\alpha_i\in\mathbb{F}$ t.d.

$$b=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n=\underbrace{(a_1|a_2|\dots|a_n)}_{=A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistem $Ax=b$ ima rješenje za $\forall b\in\mathcal{V}$ (rješenje je $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$)

"$\Longleftarrow$" Pretpostavimo da sistem $Ax=b$ ima rješenje za $\forall b\in\mathcal{V}$ tj. za $\forall b\in\mathcal{V}$ $\exists x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ t.d. $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=b$

$$Ax=(a_1|a_2|\dots|a_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n=b$$

$\Rightarrow$ $b\in\operatorname{span}\mathcal{S}$ $\overset{\text{kako je } b \text{ proizvoljno}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{V}=\operatorname{span}\mathcal{S}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ $\underset{(\text{grana})}{\text{generiše}}$ $\mathcal{V}$

($\mathcal{S}$ je generator od $\mathcal{V}$)

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, i neka je

$$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\{x+y \mid x\in\mathcal{X} \text{ i } y\in\mathcal{Y}\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$.

Rj. Označimo sa $\mathcal{S}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ i pokažimo da $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S}$ neprazan (za vježbu) i da zadovoljava osobine (A1) i (M1) iz definicije vektorskog podprostora.

(A1) $u,v\in\mathcal{S}\Rightarrow u+v\in\mathcal{S}$

$u\in\mathcal{S}\Rightarrow u=x_1+y_1$ gdje $x_1\in\mathcal{X}$, $y_1\in\mathcal{Y}$

$v\in\mathcal{S}\Rightarrow v=x_2+y_2$ gdje $x_2\in\mathcal{X}$, $y_2\in\mathcal{Y}$ $\Big\}\Longrightarrow$ $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su zatvoreni u odnosu na sabiranje

$$u+v=\underbrace{(x_1+x_2)}_{\in\mathcal{X}}+\underbrace{(y_1+y_2)}_{\in\mathcal{Y}}\in\mathcal{S}$$

osobina (A1) je zadovoljena

(M1) $u\in\mathcal{S}\Rightarrow\alpha u\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{F}$

oba prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su zatvoreni u odnosu na skalarno množenje pa je $\alpha x_1\in\mathcal{X}$ i $\alpha y_1\in\mathcal{Y}$ za $\forall\alpha$

$$\alpha u=\alpha(x_1+y_1)=\underbrace{\alpha x_1}_{\in\mathcal{X}}+\underbrace{\alpha y_1}_{\in\mathcal{Y}}\in\mathcal{S}\quad\forall\alpha\in\mathbb{F}$$

osobina (M1) je zadovoljena

$\Rightarrow$ $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ je podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$

Za $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$, neka je $A(\mathcal{S}) = \{Ax \mid x \in \mathcal{S}\}$ skup koji sadrži sve moguće proizvode matrice A sa vektorima iz $\mathcal{S}$. Skup $A(\mathcal{S})$ zovemo slika od $\mathcal{S}$ pod A.

(a) Ako je $\mathcal{S}$ podprostor od $\mathbb{R}^n$, dokazati da je $A(\mathcal{S})$ podprostor od $\mathbb{R}^m$.

(b) Ako $s_1, s_2, \dots, s_k$ generišu $\mathcal{S}$, pokazati da $As_1, As_2, \dots, As_k$ generišu $A(\mathcal{S})$.

Rj. (a) Prema definiciji $A(\mathcal{S})$ je podprostor od $\mathbb{R}^m$ ako je $A(\mathcal{S})$ neprazan skup i ako vrijede sljedeća dva uslova

(A1) $Ax, Ay \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow Ax + Ay \in A(\mathcal{S})$

(M1) $Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow \alpha Ax \in A(\mathcal{S})$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Pokažimo (A1):

$Ax, Ay \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow Ax + Ay = A\underbrace{(x+y)}_{\in\mathcal{S}} \in A(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}^m$ vrijedi A1.

Pokažimo (M1):

(zato što je $\mathcal{S}$ podprostor od $\mathbb{R}^n$)

$Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow \alpha Ax = A\underbrace{(\alpha x)}_{\in \mathcal{S}} \Rightarrow \underbrace{A(\alpha x)}_{\in\mathcal{S}} \in A(\mathcal{S})$ vrijedi M1

$A(\mathcal{S})$ je podprostor od $\mathbb{R}^m$

(b) $\mathcal{S} = span\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \Rightarrow A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$.

Da bi pokazali da $A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ mi ćemo u stvari pokazati da $span\{As_1, As_2, \dots, As_k\} \subseteq A(\mathcal{S})$ ...(1)

i $A(\mathcal{S}) \subseteq span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ ...(2)

Pokažimo (1): Izaberimo proizvoljno $x \in span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.d. $x = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \dots + \alpha_n As_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \underbrace{A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n)}_{\in \mathcal{S} \text{ (zato što } \mathcal{S} = span\{s_1, s_2, \dots, s_k\})} \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow$ vrijedi (1)

Pokažimo (2): Izaberimo proizvoljno $Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow x \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.d. $x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n \Rightarrow Ax = A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n)$

$\Rightarrow Ax = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \dots + \alpha_n As_n \in span\{As_1, As_2, \dots, As_n\} \Rightarrow$ vrijedi (2)

Prema tome $A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ q.e.d.

Neka su $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ vektorski podprostori prostora $\mathcal{V}$. Objasniti zašto je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$.

Rj. Želimo pokazati da je $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ i da je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$.

Neka je $\mathcal{M} = span\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ i $\mathcal{N} = span\{n_1, n_2, \dots, n_t\}$.

Prvo pokažimo da je $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$.

Izaberimo proizvoljno $z \in span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = x + y$ gdje je $x \in span(\mathcal{M})$, a $y \in span(\mathcal{N})$

$\Downarrow$ $\exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ t.d. $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i$

$\Downarrow$ $\exists \beta_j \in \mathbb{F}$ t.d. $y = \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j$

$\Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ $z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j \Rightarrow z \in span\{m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_t\}$

$\Rightarrow z \in span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ tj. $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ ...(*)

Pokažimo sad da je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$

Izaberimo proizvoljno $z \in span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in span\{m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_t\} \Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ t.d.

$$z = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r + \beta_1 n_1 + \dots + \beta_t n_t \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j \Rightarrow z = x + y$ gdje $x \in span\,\mathcal{M}$, $y \in span\,\mathcal{N}$

$\Rightarrow z \in span\,\mathcal{M} + span\,\mathcal{N}$ tj. $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span\,\mathcal{M} + span\,\mathcal{N}$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow$ $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = span(\mathcal{M}) \cup span\,\mathcal{N}$ q.e.d.

\# Ako skupovi $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ i $\mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generišu redom vektorske podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$, pokazati da tada $\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{x+y \mid x\in\mathcal{X} \text{ i } y\in\mathcal{Y}\}$.

Rj. Neka je $\mathcal{S}_\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{X}$ generiše $\mathcal{X} \iff \mathcal{X} = \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{Y} \iff \mathcal{Y} = \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{Y} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j \mid \beta_j \in \mathbb{F} \right\}$

Trebamo pokazati da $\operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$

Izaberimo proizvoljno $z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y})$

$z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) \iff z \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$\iff \exists \gamma_i \in \mathbb{F}\ (1 \le i \le m)\ \exists \delta_j \in \mathbb{F}\ (1 \le j \le n)$ t.d.

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_m x_m + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \dots + \delta_n y_n$$

$\iff z = x + y$ gdje $x = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i$ i $y = \sum_{j=1}^{n} \delta_j y_j$ $\quad \gamma_i, \delta_j \in \mathbb{F}$

$\iff z = x + y$ gdje $x \in \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{X}$ i $y \in \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{Y}$

$\iff z = x + y$ gdje $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$

Prema tome

$z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) \iff z = x + y$ gdje $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$

$\Rightarrow \mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$

\# Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ dva podprostora vektorskog prostora $\mathcal{V}$.

a) Dokazati da je presjek $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ također podprostor od $\mathcal{V}$.

b) Pokazati da unija $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ nemora biti podprostor od $\mathcal{V}$.

Rj.

a) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ će biti podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$ akko su zadovoljene sljedeće dvije aksiome

(A1) $x, y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x + y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

(M1) $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(A1)

$x, y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{X} \text{ i } x \in \mathcal{Y} \\ y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow y \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{X} \text{ i} \\ x, y \in \mathcal{Y} \end{array}$

$\Rightarrow x + y \in \mathcal{X}$ i $x + y \in \mathcal{Y}$ (Zašto?) $\Rightarrow x + y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

(M1)

$x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{X}$ i $x \in \mathcal{Y} \xRightarrow{\forall \alpha \in \mathbb{F}} \alpha x \in \mathcal{X}$ i $\alpha x \in \mathcal{Y}$ (Zašto?)

$\mathcal{X}$ vekt. podpr.
$\mathcal{Y}$ vekt. podpr.

$\Rightarrow \alpha x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ jest podprostor od $\mathcal{V}$.

b) Da bi pokazali da $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ ne mora biti podprostor od $\mathcal{V}$, pronađimo konkretne primjere za $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ u kojima npr. aksiom (A1) nije zadovoljena

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$

Znamo da su x-osa i y-osa podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$

$u = (1,0) \in \mathcal{X} = \{x\text{-osa}\}$
$v = (0,1) \in \mathcal{Y} = \{y\text{-osa}\}$ $\Rightarrow u + v = (1,1) \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \{xOy \text{ ravan}\}$, $\mathcal{Y} = \{xOz \text{ ravan}\}$

$u = (0,1,0) \in \mathcal{X}$
$v = (1,0,1) \in \mathcal{Y}$ $\Rightarrow u + v = (1,1,1) \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$

(#) Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Pokazati da ako $\mathcal{S}$ zadovoljava sljedeće dvije osobine

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za svako $\alpha \in \mathbb{F}$

tada je $\mathcal{S}$ vektorski prostor ($\mathbb{F}$ je skup realnih ili kompleksnih brojeva).

Rj.

Trebamo pokazati da $\mathcal{S}$ zadovoljava sve osobine iz definicije vektorskog prostora.

(A1) $x+y \in \mathcal{S}$ za $\forall x, y \in \mathcal{S}$

ova osobina je zadovoljena iz pretpostavke zadatka

(A2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$

Kako je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ ova osobina je naslijeđena iz $\mathcal{V}$

(A3) $\exists 0 \in \mathcal{S}$ t.d. $x+0=x$ $\forall x \in \mathcal{S}$

(A4) $\forall x \in \mathcal{S}$ $\exists (-x) \in \mathcal{S}$ t.d. $x+(-x)=0$.

Za $\mathcal{V}$ već znamo da je $0 \in \mathcal{V}$ neutralni element i da je $-x$ inverzni za $\forall x \in \mathcal{V}$. Pokažimo da je $0 \in \mathcal{S}$ i da je $-x \in \mathcal{S}$

Znamo da $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

pa ako za α uzmemo -1 imamo

$$-x = (-1)x \in \mathcal{S} \text{ tj. } -x \in \mathcal{S}$$ (time je A4 zadovoljeno)

Kako $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$ to je $x+(-x) \in \mathcal{S}$ tj. $0 \in \mathcal{S}$

(ovim je A3 zadovoljeno

(A5) $x+y = y+x$ $\forall x, y \in \mathcal{S}$

Ova osobina, kao i osobine (M2), (M3), (M4) i (M5) su naslijeđene iz vektorskog prostora $\mathcal{V}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$).

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

ova osobina je zadovoljena na osnovu pretpostavke zadatka

Prema tome $\mathcal{S}$ jest vektorski prostor

Zadaci za vježbu

1. Ako je $\mathcal{X}$ ravan koja prolazi kroz koordinatni početak u $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{Y}$ prava koja prolazi kroz koordinatni početak i okomita je na $\mathcal{X}$, šta predstavlja $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$?

2. U $\mathbb{R}^3$ skicirati slike podprostora koji su generisani sljedećim skupovima

(a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-9\\-6\end{pmatrix}\right\}$, (b) $\left\{\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, (c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

3. Sa uobičajenim sabiranjem i množenjem, odrediti da li su sljedeći skupovi vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$.
(a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{C}$, (c) $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi).

4. Neka su $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ i $\mathcal{N} = \{m_1, m_2, \dots, m_r, v\}$ dva skupa vektora iz istog vektorskog prostora. Dokazati da $span(\mathcal{M}) = span(\mathcal{N})$ ako i samo ako $v \in span(\mathcal{M})$.

5. Za skup vektora $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dokazati da je $span(\mathcal{S})$ presjek svih podprostora koji sadrže $\mathcal{S}$.
uputa: za $\mathcal{M} = \bigcap_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}} \mathcal{S}$ dokazati da je $span(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}$ i da je $\mathcal{M} \subseteq span(\mathcal{S})$.

2. Četri fundamentalna podprostora

(2.01) Podprostori i linearne funkcije

Za linearnu funkciju f koja preslikava $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, neka $im(f)$ označava rang (ili sliku) funkcije f. Tj. $im(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ je skup svih "slika" kad $\boldsymbol{x}$ uzima vrijednosti iz $\mathbb{R}^n$.

Rang svake linearne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je podprostor od $\mathbb{R}^m$, i svaki podprostor od $\mathbb{R}^m$ je rang neke linearne funkcije.

Zbog ovog razloga, podprostor od $\mathbb{R}^m$ se nekad zovu linearni prostori. $\diamond$

(2.02) Rang prostor

Rang prostor matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ je, definisan kao, podprostor $im(A)$ od $\mathbb{R}^m$, koji je generisan pomoću ranga funkcije $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Tj.

$$im(A) = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Slično, rang od $A^\top$ je podprostor of $\mathbb{R}^n$ definisan sa

$$im(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Kako je $im(A)$ skup svih "slika" vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ pod transformacijom A, nekad se u literaturi $im(A)$ zove slika prostor od A. $\diamond$

(2.03) Kolona i red prostor

Za $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sljedeće tvrdnje su tačne.
(i) $im(A) =$ prostor generisan pomoću kolona matrice A (kolona prostor).
(ii) $im(A^\top) =$ postor generisan pomoću redova matrice A (red prostor).
(iii) $\boldsymbol{b} \in im(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ za neki $\boldsymbol{x}$.
(iv) $\boldsymbol{a} \in im(A^\top) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^\top = \boldsymbol{y}^\top A$ za neki $\boldsymbol{y}^\top$. $\diamond$

(2.04) Jednaki rang prostori

Za dvije matrice A i B istog oblika:
(i) $im(A^\top) = im(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.
(ii) $im(A) = im(B)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$. $\diamond$

(2.05) Generatori za red prostor i rang prostor

Neka je A matrica oblika $m \times n$, i neka je U matrica u red ešelon obliku dobijena iz A. Generatori za red i kolona prostor su sljedeći:
(i) Nenula redovi od U generišu $im(A^\top)$.
(ii) Osnovne kolone u A generišu $im(A)$. $\diamond$

(2.06) Nulaprostor ili jezgro

(i) Za $m \times n$ matricu A, skup

$$ker(A) = \{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zovemo nulaprostor ili jezgro matrice A. Drugim riječima, $ker(A)$ je jednostavno skup svih rješenja homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(ii) Skup

$$ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \,|\, A^\top\boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

zovemo naulaprostor sa lijeve strane matrice A, zato što je $ker(A^\top)$ skup svih rješenja lijevog homogenog sistema $\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{0}^\top$. $\diamond$

(2.07) Generator za nulaprostor

Da bi odredili generator skup za nulaprostor $ker(A)$, gdje je $rang(A_{m\times n}) = r$, pomoću red operacija reduciramo matricu A na red ešelon oblik U, i onda riješimo sistem $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Osnovne varijable ćemo napisati pomoću slobodnih varijabli i time kreirati opšte rješenje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Prema definiciji skup $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_{n-r}\}$ generiše $ker(A)$. Štaviše, može se dokazati da je $\mathcal{H}$ jedinstven u smislu da je $\mathcal{H}$ nezavisan od oblika red ešelon matrice U.
(Opisana procedura je specijalni slučaj Kroneker-Kapelijeve metode za rješavanje sistema linearnih jednačina, koja je poznata iz Uvoda u linearnu algebru). $\diamond$

(2.08) Nula nulaprostor

Ako je A $m \times n$ matrica, tada
(i) $ker(A) = \{\boldsymbol{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = n$;
(ii) $ker(A^\top) = \{\boldsymbol{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = m$;
$\diamond$

(2.09) Nulaprostor sa lijeve strane

Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, i ako $PA = U$, gdje je P nesingularna i U je u red ešelon obliku, tada najmanje $m - r$ redova u P generišu lijevi nulaprostor matrice A. Drugim riječima, ako je $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ gdje je matrica P_2 oblika $(m - r) \times m$, tada

$$ker(A^\top) = im(P_2^\top).$$

$\diamond$

(2.10) Jednakost nulaprostora

Za dvije matrice A i B istog oblika
(i) $ker(A) = ker(B)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.
(ii) $ker(A^\top) = ker(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$.
$\diamond$

(2.11) Sažetak

Četri fundamentalna podprostora pridružena matrice A su sljedeća.

- Rang ili kolona prostor: $im(A) = \{A\boldsymbol{x}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Red prostor ili rang prostor sa lijeve strane: $im(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor (ili jezgro): $ker(A) = \{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor sa lijeve strane: $ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \,|\, A^\top\boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

- Generator skup za $im(A) =$ osnovne kolone u A.
- Generator za $im(A^\top) =$ nenula redovi u U.
- Generator za $ker(A) =$ vektori h_i u opštem rješenju sistema $A\boldsymbol{x} = 0$.
- Generator za $ker(A^\top) =$ najmanje $m - r$ redova iz P.

Ako su A i B istog oblika, tada

- $A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad ker(A) = ker(B) \quad \Leftrightarrow \quad im(A^\top) = im(B^\top)$.
- $A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad im(A) = im(B) \quad \Leftrightarrow \quad ker(A^\top) = ker(B^\top)$. $\diamond$

(#) Data je matrica $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Pokazati da su sljedeće dvije tvrdnje tačne:

a) $im(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A (kolona prostor)

b) $im(A^T)$ = prostor generisan pomoću redova matrice A (red prostor)

Rj: Prema definiciji

$$im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad im(A^T) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\}$$

a)
Neka su $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ kolone matrice A,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$ Tada

$$Ax = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A_{*1}x_1 + A_{*2}x_2 + \dots + A_{*n}x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i A_{*i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kako je } x \in \mathbb{R}^n \text{ proizvoljan vektor}}}{=} span\{A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}\} \quad \text{q.e.d.}$$

b)
Slično nije teško pokazati da (ZA VJEŽBU)

$$im(A^T) = span\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}\}$$ gdje su

$A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ redovi matrice A, $$A = \begin{bmatrix} - & A_{1*} & - \\ - & A_{2*} & - \\ & \vdots & \\ - & A_{m*} & - \end{bmatrix}.$$

(#) Opisati $im(A)$ i $im(A^T)$ za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Rj: Prema prethodnom zadatku

$$im(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

Primjetimo da je $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ pa je

$$im(A) = span\{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} = \{\alpha_1 A_{*1} + 2\alpha_2 A_{*1} + 3\alpha_3 A_{*1}\} =$$

$$= span\left\{\beta\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R}\right\} = span\{A_{*1}\}$$

Slično

$$im(A^T) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right\} = \left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\alpha_1 + 2\alpha_2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\beta\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

Odrediti da li sljedeći skupovi generišu isti podprostor

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\1\\4\end{bmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}.$$

Rj. Iz elementarne teorije Linearne algebre znamo da za dvije matrice A i B istog oblika vrijedi

$$\underline{im(A^T)=im(B^T)\quad \text{akko}\quad A\overset{red}{\sim}B}$$

$$\underline{im(A)=im(B)\quad \text{akko}\quad A\overset{kol}{\sim}B}$$

gdje je $\overset{red}{\sim}$ oznaka za red ekvivalenciju, a $\overset{kol}{\sim}$ oznaka za kolona ekvivalenciju.

Ako kolone skupa $\mathcal{A}$ postavimo kao redove matrice A, a kolone skupa $\mathcal{B}$ postavimo kao redove matrice B imamo

$$span(\mathcal{A})=im(A^T)\quad i\quad span(\mathcal{B})=im(B^T)\quad \text{gdje}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}\quad i\quad B=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}.$$

Svedimo matrice A i B u reducirani red ešelon oblik.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&-3&-3\\0&0&-5&-5\end{bmatrix}\underset{III_v:(-5)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\overset{I_v+II_v(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E_A$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}\overset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&1\end{bmatrix}\overset{I_v+II_v\cdot(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=E_B$$

Prema tome $span(\mathcal{A})=span(\mathcal{B})$ zato što se nenula redovi u E_A i E_B poklapaju.

Odrediti generator skupove za $im(A)$ i $im(A^T)$ gdje je

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}$$

Rj. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da, ako je U bilo koja matrica u red ešelon obliku dobijena iz A tada

$$\underline{\text{nenula redovi od } U \text{ generišu } im(A^T)}$$

$$\underline{\text{osnovne kolone u } A \text{ generišu } im(A)}$$

Svedimo matricu A na red ešelon obliku U

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&-3&-3\\0&0&-5&-5\end{bmatrix}\underset{III_v:(-5)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\overset{II_v-III_v}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v-II_v\cdot 2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$im(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$im(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Posmatrajmo linearni sistem jednačina $A_{m\times n}\, x = b$.

(a) Objasniti zašto je $Ax=b$ saglasan sistem ako i samo ako $b\in im(A)$.

(b) Objasniti zašto saglasan sistem $Ax=b$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako $ker(A)=\{\mathbf{0}\}$.

Rj.

$$Ax=b \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

a) $im(A) := \{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\} = \{$ prostor generisan pomoću kolona matrice $A\}$

$b\in im(A) \iff \exists x\in\mathbb{R}^n$ t.d. $Ax=b \iff Ax=b$ je saglasan sistem (sistem ima bar jedno rješenje)

b) $ker(A) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

$ker(A)=\{\mathbf{0}\} \iff$ jedino rješenje sistema $Ax=0$ je trivijalno rješenje $x=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

$\iff$ rang $A=n \iff$ rang $A=$ rang $\bar{A}=n \iff$

$\iff Ax=b$ ima jedinstveno rješenje

(gdje je $\bar{A}=[A \mid b]$ proširena matrica)

Pretpostavimo da je A 3×3 matrica tava da skupovi

$$\mathcal{R}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \mathcal{N}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

generišu $im(A)$ i $ker(A)$, redom, i posmatrajmo linearni sistem $Ax=b$, gdje je $b=\begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}$.

(a) Objasniti zašto $Ax=b$ mora biti saglasan sistem.

(b) Objasniti zašto $Ax=b$ ne može imati jedinstveno rješenje.

Rj. $im(A) := \{Ax \mid x\in\mathbb{R}^3\} = \{$ prostor generisan pomoću kolona od $A\}$

a) $im(A) \underset{\text{zadatka}}{\overset{\text{prema postavci}}{=\!=}} span(\mathcal{R}) = \left\{d_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, d_1,d_2\in\mathbb{R}\right\}$

$Ax=b$ je saglasan sistem $\iff \exists x\in\mathbb{R}^3$ t.d. $b=Ax \iff$

$\iff b\in im(A) \iff b\in span(\mathcal{R})$

Provjerimo da li $b\in span(\mathcal{R})$?

$$d_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \iff \begin{array}{ll} d_1+d_2=1 & \dots(1) \\ 2d_1-d_2=-7 & \dots(2) \\ 3d_1+2d_2=0 & \dots(3) \end{array}$$

(1)+(2): $3d_1=-6$, $d_1=-2$

(3): $-6+2d_2=0$, $d_2=3$

Prema tome $b=(-2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow b\in span(\mathcal{R})$

Prema tome $Ax=b$ mora biti saglasan sistem.

b) Ako bi $Ax=b$ imao jedinstveno rješenje to bi značilo da rang$(A)=n \iff ker(A)=\{\mathbf{0}\}$

#kontradikcija

(prema postavci zadatka $ker(A)=span(\mathcal{N})$ tj. $ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\neq\{\mathbf{0}\}$).

$ker(A) := \{x \mid Ax=0\}$.

Ako je

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad i \quad b=\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$ da li je $b\in im(A)$?

Rj. $im(A):=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^5\}$

Pitanje da li je $b\in im(A)$ se može postaviti u drugom obliku: Da li postoji $x\in\mathbb{R}^5$ takvo da $Ax=b$? ili u obliku: Da li je sistem $Ax=b$ saglasan?

$$\bar{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & -7 \end{array}\right] \overset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -6 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 & 4 & -7 \end{array}\right] \underset{\substack{IV_v-II_v \\ V_v-II_v}}{\overset{III_v-II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\substack{IV_v+III_v\cdot(-2) \\ V_v+III_v\cdot(-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow rang(A)=rang(\bar{A})$$

Sistem je saglasan. b pripada $im(A)$.

Pretpostavimo da je A $n\times n$ matrica.

(a) Ako je $im(A)=\mathbb{R}^n$, objasniti zašto A mora biti nesingularna?

(b) Ako je A nesingularna, opisati njegova četiri fundamentalna podprostora

Rj.

a) $im(A)=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}=\{$prostor generisan pomoću kolona matrice $A\}$

$im(A)=\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall b\in\mathbb{R}^n\ \exists x\in\mathbb{R}^n$ t.d. $Ax=b$

$$\mathbb{R}^n=span\left\{\underset{\in\mathbb{R}^n}{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}, \underset{\in\mathbb{R}^n}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}, \dots, \underset{\in\mathbb{R}^n}{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}\right\}$$

$im(A)=im(I_n) \Rightarrow A\overset{kol}{\sim} I_n \Rightarrow rang(A)=rang(I_n)=n$

$\Rightarrow$ A je nesingularna matrica

b) $\underline{A \text{ nesingularna} \Leftrightarrow \text{sistem } Ax=b \text{ ima jedinstveno rješenje}}$
$\underline{\text{za } \forall b\in\mathbb{R}^n \Leftrightarrow rang(A)=n}$

$im(A):=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}$ $\quad$ $im(A^T):=\{A^Tx \mid x\in\mathbb{R}^n\}$

$ker(A):=\{x \mid Ax=0\}$ $\quad$ $ker(A^T):=\{y \mid A^Ty=\mathbf{0}\}$

$ker(A)=ker(A^T)=\{\mathbf{0}\}$

$im(A)=im(A^T)=\mathbb{R}^n$ $\quad$ Zašto?

\# Posmatrajmo matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&-4&4\\4&-8&6\\0&-4&5\end{bmatrix}$.

(a) Da li A i B imaju isti red prostor?

(b) Da li A i B imaju isti kolona prostor?

(c) Da li A i B imaju isto jezgro?

(d) Da li A i B imaju isti nulaprostor sa lijeve strane? (jezgro sa lijeve strane).

Rj:

Red prostor je prostor generisan pomoću redova matrice A, i on je u stvari $im(A^T)$.
Kolona prostor je prostor generisan pomoću kolona matrice A, i on je u stvari $im(A)$.

$$im(A^T)=im(B^T) \iff A \overset{red}{\sim} B$$

$$im(A)=im(B) \iff A \overset{kol}{\sim} B$$

$ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$ jezgro matrice A.

$ker(A^T)=\{y \mid A^Ty=0\}$ jezgro sa lijeve strane.

$$ker(A)=ker(B) \iff A \overset{red}{\sim} B$$

objasniti zašto?

$$ker(A^T)=ker(B^T) \iff A \overset{kol}{\sim} B$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v+I_v(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&-2&-4\\0&1&2\end{bmatrix} \overset{II_v\leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&-2&-4\end{bmatrix} \overset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix} \overset{I_v+II_v\cdot(-1)}{\sim}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=E_A, \quad B=\begin{bmatrix}1&-4&4\\4&-8&6\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{II_v-I_v\cdot 4}{\sim} \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&8&-10\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{II_v:2}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&4&-5\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{III_v+II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&4&-5\\0&0&0\end{bmatrix} \overset{I_v+II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&4&-5\\0&0&0\end{bmatrix}=E_B$$

Kako je $E_A \neq E_B$ znači da $im(A^T) \neq im(B^T)$ i da je $ker(A) \neq ker(B)$.

E_A je reducirani red ešelon oblik matrice A
E_B je reducirani red ešelon oblik matrice B

Za vježbu pokazati da je $E_{A^T}=E_{B^T}$ što povlači da je

$$im(A)=im(B) \quad i \quad ker(A^T)=ker(B^T).$$

Odrediti generator skup za $ker(A)$, gdje je

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{bmatrix}.$$

Rj. $ker(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

$ker(A)$ je u stvari opšte rješenje sistema $Ax=0$.
Riješimo sistem $Ax=0$ Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A}=[A\mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&4&6&0\end{array}\right]\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $rang(A)=ran(\bar{A})=1<3$ $\Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno.

$$Ax=0 \quad \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1+2x_2+3x_3=0$

$x_2=s$, $x_3=t$ $\Rightarrow$ $x_1=-2x_2-3x_3$
$=-2s-3t$

Rješenje sistema je $(-2s-3t, s, t)$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s-3t\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s\\s\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3t\\0\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Geometrijski ovo predstavlja ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i sadrži tačke $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Neka je data matrica $A_{m\times n}$. Pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$ker(A)=\{\mathbf{0}\} \text{ ako i samo ako } rang(A)=n.$$

Rj. "$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $ker(A)=\{\mathbf{0}\}$. Prema definiciji

$$ker(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$$

Ovo znači da je jedino rješenje homogenog sistema $Ax=\mathbf{0}$ trivijalno rješenje $x=\mathbf{0}$.
Isto tako, znamo da sistem $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje akko $rang(A)=rang(\bar{A})=$ broj nepoznatih.
Kako je broj nepoznatih n imamo

$$rang(A)=n$$

q.e.d.

"$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je $rang(A)=n$, i posmatrajmo sistem $Ax=\mathbf{0}$. Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje akko $rang(A)=rang(\bar{A})=$ broj nepoznatih. Kako je $rang(\bar{A})\geq rang(A)$ za svaku matricu A imamo da je

$$rang(A)=rang(\bar{A})=n.$$

Jedino rješenje sistema $Ax=0$ je trivijalno rješenje iz čega slijedi

$$ker(A)=\{\mathbf{0}\}$$

q.e.d.

(#) Odrediti generator skup za $\ker(A^T)$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rj. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da, ako je $\operatorname{rang}(A_{m \times n}) = r$, i ako je $PA = U$, gdje je P nesingularna matrica oblika $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, gdje je U matrica u red ešelon obliku i gdje je P_2 oblika $(m-r) \times m$ tada

$$\underline{\ker(A^T) = \operatorname{im}(P_2^T)}$$

Da bi odredili nesingularnu matricu P takvu da $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, primjenjićemo sljedeću proceduru: osnovnim red operacijama matricu $[A \mid I]$ ćemo svesti na $[U \mid P]$.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v \cdot (-3)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{III_v : (-5)}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/15 & 1/3 & -1/5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9 - 10}{15} = -\frac{1}{15} \right]$$

$$\overset{III_v \cdot (-5)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -5/2 & 1 \end{bmatrix} \implies \ker(A^T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ova stranica je ostavljena prazna)

3. Linearna nezavisnost

(3.01) Linearna nezavisnost
Za skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ kažemo da je *linearno nezavisan skup* kadgod je jedino rješenje homogene jednačine

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

za skalare α_i trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ako postoji netrivijalno rješenje za α-e (tj. najmanje jedan $\alpha_i \neq 0$) date homogene jednačine, skup $\mathcal{S}$ je *linearno zavisan skup*. Drugim riječima, linearno nezavisni skupovi su oni koji ne sadrže zavisne relacije, i linearno zavisni skupovi su oni skupovi u kojima je najmanje jedan vektor kombinacija svih osalih. Po dogovoru prazan skup je uvijek linearno nezavisan. ◇

(3.02) Linearna nezavisnost i matrice
Neka je A $m \times n$ matrica.
(i) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.
▷ $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.
▷ $rang(A) = n$.
(ii) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup.
▷ $ker(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$.
▷ $rang(A) = m$.
(iii) Kada je A kvadratna matrica, svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je A nesingularna.
▷ Kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.
▷ Redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup. ◇

(3.03) Najveći nezavisi podskupovi
Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, tada vrijede sljedeće tvrdnje:
(i) Najveći nezavisni podskup kolona koji se može izvući iz A sadrži tačno r kolona.
(ii)Najveći nezavisni podskup redova koji se može izvući iz A sadrži tačno r redova.
(iii) Među ostalim mogućnostima za odabir, r osnovnih kolona iz A sadrže jedan najveći nezavisni podskup kolona iz A. ◇

(3.04) Osnovne tvrdnje o nezavisnosti
Za neprazan skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ u vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, sljedeće tvrdnje su tačne.
(i) Ako $\mathcal{S}$ sadrži linearno zavisan podskup, tada i sam $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan.
(ii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan, tada je i svaki podskup od $\mathcal{S}$ također linearno nezavisan.
(iii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan i ako je $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, tada *produženi skup* $\mathcal{S}_{prod} = \mathcal{S} \cup \{\boldsymbol{v}\}$ je također linearno nezavisan ako i samo ako $\boldsymbol{v} \notin span(\mathcal{S})$.
(iv) Ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ i ako je $n > m$, tada $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan. ◇

(ova stranica je ostavljena prazna)

Odrediti da li je dati skup linearno nezavisan. Ako je linearno zavisan, napisati jedan od vektora kao linearnu kombinaciju ostalih:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj: Skup vektora $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right\}$ je prema definiciji linearno nezavisan akko jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Dati sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&9\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Problem linearne nezavisnosti skupa sad možemo svesti na problem da li je matrica A nesingularna ili na problem ranga matrice A. (prema definiciji A je nesingularna akko $\exists A^{-1}$).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&9\end{pmatrix}\underset{III_v-I_v\cdot 3}{\overset{II_v-I_v\cdot 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&3\\0&-6&6\end{pmatrix}\underset{III_v:(-6)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{III_v+II_v\cdot(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{I_v+II_v}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=E$$

E je red ešelon oblik matrice A

$\operatorname{rang}(A)=2$

Dati skup je linearno zavisan

Iz $E_A \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\alpha_1+3\alpha_2&=0 &\Rightarrow \alpha_1&=-3\alpha_2\\ \alpha_2-\alpha_3&=0 &\Rightarrow \alpha_3&=\alpha_2\end{aligned}$$

$$-3\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad /:\alpha_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

treći vektor kao linearna kombinacija preostala dva

Odrediti da li je sljedeći skup matrica linearno nezavisan skup

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj: Prema definiciji linearne nezavisnosti dati skup matrica će biti linearno nezavisan akko jedino rješenje homogene jednačine

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.

Datu homogenu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ \alpha_3+\alpha_4&=0\\ \alpha_4&=0.\end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da će jedino rješenje sistema biti trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ tj. dati skup matrica je linearno nezavisan skup.

Odrediti da li je dati skup linearno nezavisan:

$\{(1 \ 2 \ 3), (0 \ 4 \ 5), (0 \ 0 \ 6), (1 \ 1 \ 1)\}$.

U slučaju linearne zavisnosti napisati jedan vektor kao linearnu kombinaciju ostalih.

Rj: Dati skup vektora je prema definiciji linearno nezavisan akko jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1(1 \ 2 \ 3)+\alpha_2(0 \ 4 \ 5)+\alpha_3(0 \ 0 \ 6)+\alpha_4(1 \ 1 \ 1)=(0 \ 0 \ 0)$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Dati sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pa je dati skup linearno nezavisan akko rang $A = 4$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \overset{IV_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \overset{III_v + II_v \cdot (-2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \end{array} = E$$

E je red ešelon oblik matrice A

$\text{rang}(A)=3$

dati skup je linearno zavisan

$$E \Rightarrow \begin{array}{lll} \alpha_1+\alpha_4 = 0 & \Rightarrow & \alpha_1 = -\alpha_4 \\ -\alpha_4 + 4\alpha_2 = 0 & \Rightarrow & \alpha_2 = \frac{1}{4}\alpha_4 \\ 6\alpha_3 - 3\alpha_2 = 0 & \Rightarrow & \alpha_2 = 2\alpha_3 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \frac{1}{4}\alpha_4 = 2\alpha_3, \quad \alpha_3 = \frac{1}{8}\alpha_4$$

Prema tome

$$-\alpha_4(1 \ 2 \ 3)+\frac{1}{4}\alpha_4(0 \ 4 \ 5)+\frac{1}{8}\alpha_4(0 \ 0 \ 6)+\alpha_4(1 \ 1 \ 1)=(0 \ 0 \ 0) \quad /:\alpha_4$$

$$(1 \ 2 \ 3)=\frac{1}{4}(0 \ 4 \ 5)+\frac{1}{8}(0 \ 0 \ 6)+(1 \ 1 \ 1)$$

ovaj zadatak ostavi za vježbu

Odrediti da li je skup $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$ linearno nezavisan.

U slučaju linearne zavisnosti jedan od vektora izraziti kao linearnu kombinaciju ostala dva.

Rj. Mi u stvari želimo ispitati da li postoji netrivijalno rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

u kome su α-e nepoznate, ili drugim riječima da li postoji rješenje homogenog sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Svedimo matricu A u red ešelon oblik

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{III_v - I_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{III_v + I_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 < 3$$

$\Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno zavisan skup

$\Rightarrow$ skup vektora $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$ je linearno zavisan

provjera:

$$E_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v + II_v}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \end{array}$$

$$\alpha_2 = -2\alpha_3$$
$$\alpha_1 = -3\alpha_3$$

za $x_3=t \Rightarrow -3t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-2t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

ovaj zadatak je za vježbu

Neka je data realna $m \times n$ matrica A čije su kolone linearno nezavisan skup. Dokazati da je $\ker(A) = \{0\}$.

Rj. Prisjetimo se $\ker(A) \overset{def.}{=} \{x \mid Ax = 0\}$.

Kolone matrice A označimo sa $A_{x1}, A_{x2}, \dots, A_{xn}$ tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{x1} & A_{x2} & \dots & A_{xn} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Prema definiciji kolone matrice A su linearno nezavisne akko je dino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 A_{x1} + \alpha_2 A_{x2} + \dots + \alpha_n A_{xn} = 0$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Primijetimo da izraz $\alpha_1 A_{x1} + \alpha_2 A_{x2} + \dots + \alpha_n A_{xn}$ možemo napisati i kao

$$\alpha_1 A_{x1} + \alpha_2 A_{x2} + \dots + \alpha_n A_{xn} = \begin{bmatrix} A_{x1} & A_{x2} & \dots & A_{xn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A\alpha .$$

Prema tome jedino rješenje homogenog sistema $A\alpha = 0$ je trivijalno rješenje $\alpha = \mathbf{0}$.

Ako umjesto vektora $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ stavimo vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ imamo

da je jedino rješenje homogenog sistema $Ax = 0$ trivijalno rješenje $x = 0$ tj.

$$\ker A = \{0\}.$$

q.e.d.

Neka je A realna $m \times n$ matrica. Ako kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup pokazati da je tada $\operatorname{rang}(A) = n$.

Rj. Kolone matrice A označimo sa $A_{x1}, A_{x2}, \dots, A_{xn}$ tj.

$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{x1} & A_{x2} & \dots & A_{xn} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$. Kako su kolone matrice A linearno nezavisne to znači da je dino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 A_{x1} + \alpha_2 A_{x2} + \dots + \alpha_n A_{xn} = 0$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Drugim riječima homogeni sistem $A\alpha = 0$ ima jedinstveno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

homogeni sistem $Ax = 0$ ima jedinstveno rješenje akko $\operatorname{rang} A = n$ gdje je $A_{m \times n}$

Prema tome $A\alpha = \mathbf{0}$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = \mathbf{0}$ tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = n$

q.e.d.

✓ Pokazati da ako realna matrica $A_{m \times n}$ ima $\operatorname{rang}(A) = n$ da tada kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

✓ Pokazati da ako za realnu matricu $A_{m \times n}$ vrijedi $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ tada kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

Posmatrajmo matricu $A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\4&2&1&2\\6&3&2&2\end{pmatrix}$.

a) Odrediti maksimalan linearno nezavisan podskup kolona matrice A.

b) Odrediti ukupan broj linearno nezavisnih podskupova koji se mogu konstruisati uz pomoć kolona matrice A.

Rj.

a) Sve kolone $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ matrice A će biti linearno nezavisne akko homogeni sistem

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ima tačno jedno rješenje i to je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.
Drugim riječima akko homogeni sistem

$$\begin{pmatrix}2&1&1&0\\4&2&1&2\\6&3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ima jedinstveno rješenje. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo

hom. sist. $A\alpha=0$ ima jedinstv. rješenje akko $rang(A_{m\times n})=n$ gdje je A $m\times n$ matrica

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\4&2&1&2\\6&3&2&2\end{pmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\overset{III_v+II_v(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{I_v+II_v}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&1&0&2\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=E_A \Rightarrow rang(A)=2.$$

Prema tome u matrica A nisu linearno nezavisne sve kolone. Maksimalan lin. nez. podsk <4

Ako je A_1 matrica formirana od tri proizvoljne kolone dobićemo da je $rang(A_1)<3 \Rightarrow$ broj elem u maksim lin. nez pod <3.

Iz E_A vidimo da će kolone $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ biti linearno nezavisne.

Isti rezultat smo mogli postići pozivajući se na osnovnu teoriju iz Linearne algebre

$rang(A)=r \Rightarrow$ r osnovnih kolona u A sadrže jedan maksimalan nezavisan podskup kolona iz A

Prema tome jedan maksimalan linearno nezavisan skup kolona matrice A može biti $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

b) Skupovi kolona koji imaju 3 ili 4 elementa otpadaju, zato što je prema (a) maksimalan broj elemenata 2.
Posmatrajmo skupove sa 2 elementa. Prema matrici E_A skup koji sadrži prve dvije kolone otpada. Ali zato (isto prema E_A) skupovi $\varphi_1=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_4=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ i $\varphi_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ su linearno nezavisni podskupovi formirani pomoću kolona matrice A.

dio pod b) ostavi za vježbu

Posmatrajmo podskupove sa 1 elementom:

$\varphi_6=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_7=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_8=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\varphi_9=\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

su linearno nezavisni podskupovi form. pomoću kolona matr. A.

Na kraju lin. nez. podskup sa 0 elemenata je $\varphi_{10}=\emptyset$.

Ukupan broj lin. nez. podsk. koji se mogu konstr. uz pomoć kolona matrice A je 10.

Iz osnovne teor. Lin. alg.

$rang(A)=r \Rightarrow$ najveći nezavisni podskup kolona matrice A sadrži tačno r kolona

(#) a) Neka je dat skup $S=\{0\}$ koji sadrži samo nula vektor. Objasniti zašto S mora biti linearno zavisan.

b) Objasniti zašto skup koji sadrži nula vektor mora biti linearno zavisan.

Rj.

a) Neki skup $M=\{x\}$ koji sadrži samo jedan element će prema definiciji biti linearno nezavisan akko jedino rješenje jednačine

$$\alpha x=0$$

je trivijalno rješenje $\alpha=0$.

Za naš slučaj ($S=\{0\}$) jednačina

$$\alpha 0=0$$

ima netrivijelno rješenje (bilo koje $\alpha\neq 0$) pa je S linearno zavisan skup.

b) Posmatrajmo skup M koji sadrži nula vektor. Ako skup M ima samo jedan elemenat ($M=\{0\}$) tada je M prema a) linearno zavisan skup.

Ako M ima više od jednog elementa npr. $M=\{0,x_2,\dots,x_n\}$ ($n\geq 2$) tada jednačina

$$\alpha_1 0+\alpha_2 x_2+\dots\alpha_n x_n=0$$

ima netrivijalno rješenje (npr. $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$) pa prema definiciji linearne nezavisnosti slijedi da je skup M linearno zavisan.

(#) Ako je T trougaona matrica u kojoj je svaki $t_{ii}\neq 0$, objasniti zašto redovi i kolone od T moraju formirati linearno nezavisan skup.

Rj.

Trougaona matrica je ona matrica čiji su svi elementi ispod ili iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

npr.

$$T_1=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n}\\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn}\end{bmatrix}$$

Riješimo zadatak za kolone matrice T.

Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A)=\{0\}$

$$\ker(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$$

Pa posmatrajmo sistem $Ax=0$. Ponovo iz osnovne teorije linearne algebre znamo

Homogeni sistem $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje akko $\operatorname{rang}(A)=n=$ broj nepoznatih

Ako je matrica T data u gornje-trougaonom obliku tada je T i u red ešelon obliku pa je $\operatorname{rang}(T)=n=$ broj nepoznatih $\xRightarrow{\text{sist. ima jedinstv. rj.}} \ker(A)=\{0\} \Rightarrow$ kol. od A form. lin. nez. skup q.e.d.

Ako je matrica T data u donje-trougaonom obliku tada jednačine iz homogenog sistema $Ax=0$ možemo ispremještati (redove od T možemo ispremještati) pa ćemo opet dobiti $\operatorname{rang}(T)=n=$ broj nepoznatih.

\# Bez računanja determinante, odrediti da li je sljedeća matrica singularna ili nesingularna:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Rj. Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

A nesingularna matrica akko kolone matrice A formiraju linearno nezav. skup

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A) = \{0\}$

Pa pokažimo da je $\ker(A) = \{0\}$. ($\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$).

Pretpostavimo da postoji nenula vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ t.d. $Ax = 0$,

i neka je $|x_j|$ najveći elemen u vektoru x.

Posmatrajmo homogeni sistem $Ax = 0$ tj. posmatrajmo

$$\begin{array}{r c} & \text{j-ta kolona} \\ & \begin{pmatrix} n & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

j-ta vrsta →

Ako iz homogenog sistema $\overset{Ax=0}{}$ izvučemo j-tu jednačinu imamo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{j-1} + nx_j + x_{j+1} + \dots + x_n = 0$$

tj. $$nx_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i \Rightarrow |nx_j| = \left|-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i\right|$$

$$n|x_j| = \left|-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i\right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |x_i| \overset{|x_j| \text{ najveće vrijed.}}{\leq} |x_j| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} 1 = (n-1)|x_j|$$

$\Rightarrow n|x_j| \leq (n-1)|x_j|$ # kontradikcija ($x_j \neq 0$, $x \neq 0$)

Pretpostavka da je $\ker A \neq 0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačno $\Rightarrow \ker A = 0 \Rightarrow$ A nesingularna matrica.

\# Neka je dat neprazan skup vektora $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u vektorskom prostoru V. Pokazati da ako S sadrži linearno zavisan podskup, tada S sam mora biti linearno zavisan.

Rj. Pa pretpostavimo da S sadrži linearno zavisan skup $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ od k elemenata ($k \leq n$). Permutirajmo vektore u skupu S tako da je ovaj zavisan skup

$$S_{ZAV} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

Sad prema definiciji linearne zavisnosti, postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

Ovo znači da možemo napisati

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k + \underset{\alpha_{k+1}}{\underset{\parallel}{0}} \cdot u_{k+1} + \dots + \underset{\alpha_n}{\underset{\parallel}{0}} \cdot u_n = 0$$

gdje nisu svi skalari nula. A to u stvari znači da je S linearno zavisan skup.

q.e.d.

Neka je dat neprazan skup vektora $\mathcal{S}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ u vektorskom prostoru V. Pokazati da ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup tada je svaki podskup od $\mathcal{S}$ također linearno nezavisan.

Rj.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoji podskup $\mathcal{S}_1$ skupa $\mathcal{S}$ koji je linearno zavisan. Napravimo permutaciju vektora skupa $\mathcal{S}$ tako da $\mathcal{S}_1$ sad izgleda

$$\mathcal{S}_1=\{u_1,u_2,\dots,u_k\},\quad k\leq n.$$

Kako je $\mathcal{S}_1$ linearno zavisan skup to znači da jednačina

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_ku_k=0 \qquad \dots(*)$$

ima netrivijalno rješenje (neki od $\alpha_i\neq 0$). Drugim riječima jednačina

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_ku_k+\alpha_{k+1}u_{k+1}+\dots+\alpha_nu_n=0$$

ima netrivijalno rješenje (možemo staviti da je $\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0$, a prema $(*)$ znamo da mora biti $\alpha_i\neq 0$ za neki $i\in\{1,2,\dots,k\}$) pa je $\mathcal{S}$ linearno zavisan skup

#kontradikcija
($\mathcal{S}$ je lin. nez. prema pretpostavci)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome svaki podskup od $\mathcal{S}$ je linearno nezavisan.

q.e.d.

ovaj zadatak ostavi za vježbu

Neka je dat neprazan skup vektora $\mathcal{S}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ u vektorskom prostoru V, i neka je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup. Definišimo prošireni skup $\mathcal{S}_{proš}=\mathcal{S}\cup\{v\}$ gdje je v neki vektor iz V. Pokazati da je $\mathcal{S}_{proš}$ linearno nezavisan skup ako i samo ako $v\notin span(\mathcal{S})$.

Rj.

"$\Leftarrow$" Pretpostavimo da $v\notin span(\mathcal{S})$ i pokažimo da je tada $\mathcal{S}_{proš}$ linearno nezavisan skup.

$v\notin span(\mathcal{S}) \iff$ ne postoji linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$ takva da je jednaka v-u tj.

$$\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\beta_nu_n\neq v \quad \text{za } \forall\beta_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\dots,n. \qquad \dots(\square)$$

Posmatrajmo jednačinu $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n+\alpha_{n+1}v=0. \quad \dots(\square\square)$

Ako bi α_{n+1} bila različita od 0. ($\alpha_{n+1}\neq 0$) tada bi vektor v mogli napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz $\mathcal{S}$ tj.

$$v=\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}u_1+\frac{-\alpha_2}{\alpha_{n+1}}u_2+\dots+\frac{-\alpha_n}{\alpha_{n+1}}u_n$$

#kontradikcija
(sa $(\square)$)

Prema tome $\alpha_{n+1}=0 \overset{(\square\square)}{\Longrightarrow} \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n=0$

$\xrightarrow{\mathcal{S}\text{ lin. nez. skup}} \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Možemo zaključiti $\mathcal{S}_{proš}$ je linearno nezavisan skup

q.e.d.

"$\Rightarrow$" Pretpostavimo sad da je $\mathcal{S}_{proš}$ lin. nez. skup i pokažimo da tad mora biti $v\notin span(\mathcal{S})$.

$\mathcal{S}_{proš}$ lin. nez. skup $\Rightarrow$ prema definiciji lin. nez. jedino rješenje jednačine $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n+\alpha_{n+1}v=0$ je trivij. rješ. $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{n+1}=0$.

Ako bi pretpostavili da $v\in span(\mathcal{S})$ tada bi imali $v=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$ za neke $\beta_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\dots,n$ tj. jedn. $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n+\alpha_{n+1}v=0$ bi imala netrivijalno rješenje

#kontradikcija.

Pretpostavka da $v\in span(\mathcal{S})$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $v\notin span(\mathcal{S})$

(#) Neka je dat neprazan skup vektora $\mathcal{S}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ ($\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^m$) i neka je $n>m$. Pokazati da tada $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan skup.

Rj. Vektore iz skupa $\mathcal{S}$ postavimo kao kolone matrice A tj.

$$A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo da

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A)=\{0\}$

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\operatorname{rang}(A)=n$

Pa npr. diskutujmo rang matrice A. Znamo da matrica A ima r redova pa ako je svedemo u red ešelon oblik rang matrice A može biti najviše $m<n$ tj.

$$\operatorname{rang}(A)\leq m<n \implies$$

$\implies \operatorname{rang}(A)<n \implies$ kolone matrice A formiraju linearno zavisan skup

$\implies \mathcal{S}$ je linearno zavisan skup

q.e.d.

Dijagonalna dominacija Za matricu $A_{n\times n}$ kažemo da je dijagonalno dominantna kadgod

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad \text{za svaki } i=1,2,\dots,n.$$

Tj. kada veličina svakog dijagonalnog elementa prevazilazi sumu veličina elemenata van glavne dijagonale u odgovarajućem redu.

(#) Neka je A dijagonalno dominantna matrica. Dokazati da je matrica A nesingularna.

Rj. A dijagonalno dominantna $\iff |a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad \forall i=1,2,\dots,n$

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo da

A nesingularna $\iff$ kolone matrice A linearno nezav. ...(1)

kolone matr. A lin. nez. $\iff \ker(A)=\{0\}$ ...(2)

Mi sad želimo pokazati da je $\ker(A)=\{0\}$ ($\ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$).
Pretpostavimo da $\exists x\neq 0$ t.d. $Ax=0$ (jasno $x\in\ker(A)$).
Neka je x oblika $x=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n)^T$ i neka je $|x_k|$ najveća vrijednost.

$$Ax=0 \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

Nas zanima k-ta kolona od $Ax=0$ tj.

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kk}x_k+\dots+a_{kn}x_n=0$$

tj. $a_{kk}x_k=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j$ Sad imamo

$$|a_{kk}x_k|=\Big|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j\Big|\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\underbrace{|a_{kj}x_j|}_{|a_{kj}||x_j|}\leq|x_k|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|$$

Ako podjelimo sa $|x_k|$:

$$|a_{kk}|\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}|a_{kj}| \quad \# \text{ kontradikcija}$$

(sa činjenom da je A dijag. dominantna)

Pretpostavka da $\exists x\neq 0$ t.d. $Ax=0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačno. Prema tome
$\ker(A)=\{0\} \overset{(2)}{\implies}$ kol. mat. A lin. nez. $\overset{(1)}{\implies}$ A nesingularna q.e.d.

Vandermondove matrice Matrice oblika

$$V_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1}\end{pmatrix}$$

kod kojih je $x_i \neq x_j$ za sve $i\neq j$ zovemo Vandermondove matrice.

Objasniti zašto kolone Vandermondove matrice V konstruišu linearno nezavisan skup kadgod je $n \le m$.

Rj. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

kolone matrice A formiraju lin. nez. skup akko $\ker(A)=\{0\}$.

Pretpostavimo da $\exists$ vektor $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \neq 0$ takav da $V\alpha=0$

(drugim riječima pretpostavili smo da je $\ker(A)\neq\{0\}$).

Homogeni sistem $V\alpha=0$ možemo drugačije pisati

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots&\vdots&&&\\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \iff \begin{aligned} &\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_1^2+\dots+\alpha_{n-1}x_1^{n-1}=0\\ &\alpha_0+\alpha_1x_2+\alpha_2x_2^2+\dots+\alpha_{n-1}x_2^{n-1}=0\\ &\qquad\vdots\\ &\alpha_0+\alpha_1x_m+\alpha_2x_m^2+\dots+\alpha_{n-1}x_m^{n-1}=0\end{aligned}$$

Ovo povlači da polinom

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$$

ima m različitih korijena (naime x_i-ove)

#kontradikcija

(prema fundamentalnoj teoremi algebre znamo da nenula polinom stepena $n-1$ može imati najviše $n-1$ različit korijen, a kod nas je $n\le m$)

Pretpostavka da $\exists\, \alpha\neq 0$ t.d. $V\alpha=0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

Prema tome $\ker(V)=\{0\} \iff$ kol. mat. V form. lin. nez. skup q.e.d.

Dat je skup $\mathcal{S}$ od m tački $\mathcal{S}=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_m,y_m)\}$ u kojem su svi od x_i-jeva različiti. Objasniti zašto postoji jedinstven polinom

$$g(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$$

stepena $m-1$ koji prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.

Rj. Šta znači da polinom $g(x)$ prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.

To znači da $g(x_i)=y_i$ za $\forall i=1,2,\dots,m$.

Drugim riječima

$$\begin{aligned} g(x_1)&=y_1=\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_1^2+\dots+\alpha_{m-1}x_m^{n-1}\\ g(x_2)&=y_2=\alpha_0+\alpha_1x_2+\alpha_2x_2^2+\dots+\alpha_{m-1}x_2^{m-1}\\ &\ \ \vdots\\ g(x_m)&=y_m=\alpha_0+\alpha_1x_m+\alpha_2x_m^2+\dots+\alpha_{m-1}x_m^{m-1}\end{aligned}$$

Ovo je sistem od m linearnih jednačina sa m nepoznatih $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$. Sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{m-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \vdots&\vdots&\vdots&&\\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{m-1}\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$$

Primjetimo da je matrica koeficijenata A u stvari kvadratna Vandermondova matrica. Na osnovu prethodnog zadatka A je nesingularna matrica, što $\iff$ znači $\exists A^{-1}$ a što $\iff$ znači da $\exists$ jedinstveno rješenje za $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\end{pmatrix}$. Prema tome postoji jedinstven polinom $g(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$ stepen $m-1$ koji prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.

Napomena: Polinom $g(x)$ iz prethodnog zadatka mora biti u obliku

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i\frac{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}(x-x_j)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}(x_i-x_j)}\right)$$

Ovo možemo provjeriti tako što ćemo pokazati da je desna strana zaista polinom stepena $m-1$ koja prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$. Polinom $g(x)$ je poznat pod imenom Lagranžov interpolacioni polinom stepena $m-1$.

Dat je skup $\mathcal{S}=\{\sin x, \cos x, x\sin x\}$ u vektorskom prostoru V svih realno-vrijednosnih f-ja realne varijable. Da li je skup $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup?

R: Prema definiciji linearne nezavisnosti skup $\mathcal{S}$ je linearno zavisan ako i samo ako postoje skalari α, β i γ, gdje je bar jedan različit od nule, takvi da homogena jednačina

$$\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\, x\sin x=0 \qquad \dots(*)$$

vrijedi za sve x (za koje su f-je definisane).

$(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$

Ako napravimo izvod date jednakosti imamo

$$\alpha\cos x-\beta\sin x+\gamma(\sin x+x\cos x)=0 \quad /'$$

$$-\alpha\sin x-\beta\cos x+\gamma(\cos x+\cos x-x\sin x)=0.$$

Prema tome koeficijenti α,β i γ koji zadovoljavaju $(*)$ moraju zadovoljavati i sistem

$$\begin{pmatrix}\sin x & \cos x & x\sin x\\ \cos x & -\sin x & \sin x+x\cos x\\ -\sin x & -\cos x & 2\cos x-x\sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

za svako x. Ako za x stavimo $x=0$ imamo

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

a rješenje ovog sistema je $\alpha=\beta=\gamma=0$. Prema tome jedine konstante α,β i γ za koje vrijedi

$$\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\, x\sin x=0 \quad \text{za } \forall x$$

su $\alpha=\beta=\gamma=0$ pa je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup. q.e.d.

\# Neka je V vektorski prostor realno-vrijednosnih f-ja realne varijable, i neka je $\varphi = \{1, x, x^2, x^3\}$ dati skup f-ja. Pokazati da je φ linearno nezavisan skup.

Rj. Skup f-ja $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ je prema definiciji linearno nezavisan akko jednačina

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

za svako x ima zajedničko rješenje jedino trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne svi jednaki nuli takvi da

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0.$$

za svako x, tada je skup $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ linearno zavisan.

Pa posmatrajmo jednačinu

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$$

Sve f-je su diferencijabilne, pa ako nađemo izvod imamo

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 = 0 \quad /'$$

$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 x = 0 \quad /'$$

$$6\alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Prema tome jedino zajedničko rješenje jednačine

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0 \quad \text{za } \forall x$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Skup φ je linearno nezavisan skup.

Wronski matrica: Neka je V vektorski prostor realno-vrijednosnih f-ja realne varijable, i neka je $\varphi = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ skup svih f-ja koje su $n-1$ puta diferencijabilne.

Wronski matrica je definisana sa

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

\# Ako postoji najmanje jedna tačka $x = x_0$ takva da je Wronski matrica $W(x_0)$ nesingularna, dokazati da tada $\varphi = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ mora biti linearno nezavisan skup.

Rj. Prema definiciji linearne zavisnosti skup f-ja $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ je linearno zavisan akko postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, ne svi jednaki nuli takvi da vrijedi homogena jednačina

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \qquad \dots(*)$$

za svako x. Pa posmatrajmo jednačinu $(*)$ u kojoj su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nepoznate.

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad /'$$

$$\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \dots + \alpha_n f_n'(x) = 0 \quad /'$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Prema tome konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koje zadovoljavaju $(*)$ moraju zadovoljavati i sistem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{W(x)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

za svako x.

Ako u dobijeni sistem stavimo tačku $x=x_0$ imamo

$$W(x_0)\cdot v = \mathbf{0}$$

gdje je $v=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

$\ker(A)=\{0\}$ akko A nesingularna matrica

Prema tome $\ker(W(x_0))=\{0\}$ zato što je $W(x_0)$ nesingularna matrica, pa je $v=\mathbf{0}$.

Prema tome jedino rješenje za α u $(*)$ je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$ što osigurava linearnu nezavisnost skupa $\mathcal{S}$.

Zadaci za vježbu

1. Ako je $A_{m\times n}$ takva matrica da $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$ za svako $i=1,2,\dots,n$ (tj. suma svake kolone je 0), objasniti zašto su kolone od A linearno zavisan skup, pa prema tome $\operatorname{rang}(A)<n$.

2. Ako je $\mathcal{S}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^m$ i ako je $P_{m\times m}$ nesingularna matrica, objasniti zašto skup

$$P(\mathcal{S})=\{Pu_1, Pu_2,\dots,Pu_n\}$$

mora biti linearno nezavisan skup. Da li je isti rezultat tačan i u slučaju kada je P singularna matrica.

3. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ skup vektora iz $\mathbb{R}^m$. Dokazati da je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup ako i samo ako je skup $\mathcal{S}'=\left\{u_1, \sum_{i=1}^{2}u_i, \sum_{i=1}^{3}u_i, \dots, \sum_{i=1}^{n}u_i\right\}$ linearno nezavisan.

4. Koji od sljedećih skupova f-ja su linearno nezavisni?
(a) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$
(b) $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\}$

4. Baza i dimenzije

(4.01) Baza

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo <u>*baza*</u> za $\mathcal{V}$. $\diamond$

(4.02) Karakterizacija baze

Neka je $\mathcal{V}$ podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathcal{V}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.

- $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup iz $\mathcal{V}$. $\diamond$

(4.03) Dimenzija

<u>*Dimenzija*</u> vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je definisana sa

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} &= \text{broj vektora u bilo kojoj bazi od } \mathcal{V} \\ &= \text{broj vektora u najmanjem skupu koji generiše } \mathcal{V} \\ &= \text{broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu iz } \mathcal{V}. \end{aligned}$$

$\diamond$

(4.04) Dimenzije podprostora

Za vektorske prostore $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takve da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, sljedeće tvrdnje su tačne.

- $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$.
- Ako je $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$, tada je $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. $\diamond$

(4.05) Fundamentalni podprostori - dimenzija i baze

Za $m \times n$ matricu realnih brojeva takvu da $rang(A) = r$,

- $\dim im(A) = r$,
- $\dim ker(A) = n - r$,
- $\dim im(A^\top) = r$,
- $\dim ker(A^\top) = m - r$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i neka je $\mathcal{H}$ skup od $\boldsymbol{h}_i$-ova koji se pojavljuju u opštem rješenju homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

- Osnovne kolone u A formiraju bazu za $im(A)$.
- Nenula redovi od U formiraju bazu za $im(A^\top)$.
- Skup $\mathcal{H}$ je baza za $ker(A)$.
- Zadnjih $m - r$ redova od P formira bazu za $ker(A^\top)$.

Za matricu sa kompleksnim vrijednostima, tvrdnje iznad ostaju tačne ako $A^\top$ zamjenimo sa A^*. $\diamond$

(4.06) Slika plus jezgro teorem

- $\dim im(A) + \dim ker(A) = n$ za sve $m \times n$ matrice. $\diamond$

(4.07) Rang i povezanost

Neka je Γ graf koji sadrži m vrhova. Ako je Γ neorjentisan, proizvoljno dodjeljivanje strelica na ivice grafa napravit će od Γ-e orjentisan graf, i neka je E matrica incidencije dobijenog orjentisanog grafa.

- Γ je povezan graf ako i samo ako $rang(E) = m - 1$. $\diamond$

(4.08) Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada

$$\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}).$$

$\diamond$

(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Neka je V podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}$ najmanji mogući skup koji generiše podprostor V tada je $\mathcal{B}$ baza za V.

Rj.: Prisjetimo se: <u>Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.</u>

Iz postavke zadatka imamo $V=\mathrm{span}(\mathcal{B})$. Trebamo još pokazati da je $\mathcal{B}$ linearno nezavisan skup.

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ linearno zavisan skup. Tada postoji neki b_i koji se može napisati kao linearna kombinacija ostalih b-ova, i skup

$$\mathcal{B}'=\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n\}$$

bi i dalje generisao vektorski prostor V. Prema tome $\mathcal{B}'$ generiše V i ima manje elemenata od $\mathcal{B}$.

#kontradikcija
($\mathcal{B}$ je najmanji mogući skup koji generiše V).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. $\mathcal{B}$ je baza za V.

(#) Neka je V podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}$ najveći mogući linearno nezavisan podskup od V tada je $\mathcal{B}$ baza za V.

Rj.: <u>Linearno nezavisni skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.</u>

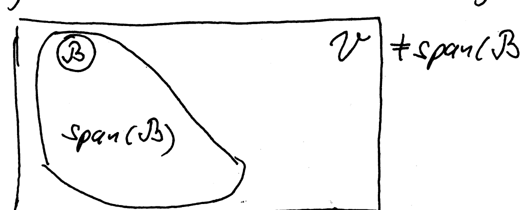
Ako je $\mathcal{B}$ najveći mogući linearno nezavisni podskup od V a nije baza za V ($\mathrm{span}(\mathcal{B}) \neq V$) tada postoji vektor $v \in V$ takav da $v \notin \mathrm{span}(\mathcal{B})$. Ovo znači da prošireni skup

$$\mathcal{B} \cup \{v\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n, v\}$$

je linearno nezavisan (u suprotnom $\mathcal{B}\cup\{v\}$ lin. zav. $\Rightarrow \exists d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ t.d. $v = d_1 b_1 + d_2 b_2 + \dots + d_n b_n \Rightarrow v \in \mathrm{span}(\mathcal{B})$)
#kontradikcija

Dobili smo da je $\mathcal{B}\cup\{v\}$ linearno nezavisan skup
#kontradikcija
($\mathcal{B}$ je najveći mogući lin. nez. podskup od V).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\mathcal{B}$ je baza za V.



ostavljeno za vježbu

\# Ako je $\mathcal{V}$ n-dimenzionalan prostor, objasniti zašto svaki nezavisan podskup $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{V}$ koji sadrži n vektora mora biti baza za $\mathcal{V}$.

Rj:

dim $\mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za $\mathcal{V}$
= broj vektora u najmanjem skupu koji generiše $\mathcal{V}$
= broj vektora u najveće mogućem nezavisnom podskupu od $\mathcal{V}$

dim $\mathcal{V} = n$ znači da svaki podskup od $\mathcal{V}$ koji sadrži više od n vektora mora biti linearno zavisan. Prema tome $\mathcal{S}$ je najveći mogući nezavisni podskup od $\mathcal{V}$.

Iz osnova teorije Linearne algebre znamo da

$\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najveći mogući linearno nezav. podskup od $\mathcal{V}$

$\mathcal{S}$ najveći mogući nezavisni podskup od $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ je baza za $\mathcal{V}$

\# Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ vektorski prostori takvi da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Pokazati da je dim $\mathcal{M} \leq$ dim $\mathcal{N}$.

Rj: Ako je $\mathcal{V}$ vektorski prostor iz osnova teorije Lineal. alg. znamo:

dim $\mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od $\mathcal{V}$
= broj vektora u bilo kojem najvećem nezavisnom podskupu $\mathcal{V}$

Pa neka je dim $\mathcal{M} = m$ i dim $\mathcal{N} = n$.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $m > n$.

dim $\mathcal{M} = m$ $\Leftrightarrow$ vektorski prostor $\mathcal{M}$ ima bazu $\mathcal{B}$ koja sadrži m linearno nezavisnih vektora

Kako je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ to je i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ $\Rightarrow$

U vektorskom prostoru $\mathcal{N}$ postoji nezavisan podskup koji sadrži m elemenata

\#kontradikcija

(dim $\mathcal{N} = n$ $\Leftrightarrow$ najveći nezavisan podskup u $\mathcal{N}$ sadrži n vektora)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $m \leq n$ tj.

dim $\mathcal{M} \leq$ dim $\mathcal{N}$

q.e.d.

Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ vektorski prostori takvi da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Ako je $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$ pokazati da je $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

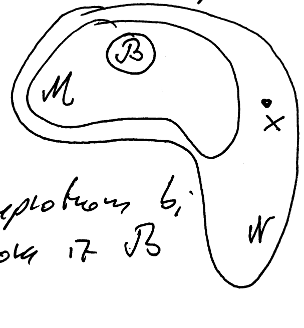
Rj. Prisjetimo se:

$\dim \mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od $\mathcal{V}$
= broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od $\mathcal{V}$

Pa neka je $\dim \mathcal{M} = m$ i $\dim \mathcal{N} = n$. (kako je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$)
Ako bi bilo $m = n$ ali $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ tada bi postojao vektor x takav da $x \in \mathcal{N}$ ali $x \notin \mathcal{M}$.

Ako je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{M}$ tada $x \notin span(\mathcal{B})$ i kako je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ to je prošireni skup

$$\mathcal{E} = \mathcal{B} \cup \{x\}$$



linearno nezavisan podskup od $\mathcal{N}$.
($\mathcal{B} \cup \{x\}$ je linearno nezavisan, u suprotnom bi imali da je x linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{B}$
$\Rightarrow x \in span(\mathcal{B})$
#kontradikcija)

Dobili smo da je $\mathcal{E}$ linearno nezavisan podskup od $\mathcal{N}$
#kontradikcija

($\mathcal{E}$ ima $m+1 = n+1$ elemenat, a kako je $\dim \mathcal{N} = n$ to znači da najveći nezavisni podskup od $\mathcal{N}$ ima tačno n elemenata).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome mora biti $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Odrediti dimenziju i bazu prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$ gdje je $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj.
$$span\,\mathcal{S} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim \mathcal{V}$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od $\mathcal{V}$

Provjerimo da li je skup $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup, tj. provjerimo da li je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

trivijalno rješenje. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$A\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Sistem će imati jedinstveno rješenje akko rang(A) = broj nepozn.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v + I_v(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{II_v : (-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v - II_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

reducirani red ešelon oblik

Skup $\mathcal{S}$ nije linearno nezavisan tj. $\dim(span(\mathcal{S})) < 3$.

Iz matrice E_A možemo vidjeti da će prvi i drugi vektor iz $\mathcal{S}$ formirati linearno nezavisan skup, tj. skup $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ je linearno nezavisan skup, tj baza je $\mathcal{B}$.
(i ostale mogućnosti za bazu su također moguće)

Možemo zaključiti $\dim(span(\mathcal{S})) = 2$.

Odrediti dimenziju prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rj. $\dim V$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

$\mathrm{span}(\mathcal{S})$ = prostor generisan skupom $\mathcal{S}$

Provjerimo da li je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup tj. da li je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

trivijalno rješenje. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=0} \quad \text{tj. sa } A\alpha = 0$$

Sistem će imati jedinstveno rješenje akko $\mathrm{rang}(A)$ = broj nepoznatih.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \underset{IV_v + I_v \cdot (-3)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2),\ III_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{IV_v + II_v}{\overset{III_v + II_v \cdot 2}{\sim}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=E} \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{Skup } \mathcal{S} \text{ je linearno zavisan.}$$

Iz matrice E možemo vidjeti je skup koji sadrži prvi drugi i četvrti vektor iz $\mathcal{S}$ tj. skup $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linearno nezavisan skup. Iz matrice E također vidimo da skup $\mathrm{span}\,\mathcal{S}$ ne može imati dimenziju 4.

Dimenzija prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$ je 3.

Odrediti dimenziju od četri fundamentalna podprostora pridruženih matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rj. Iz osnovne teorije linearne algebre znamo:

Ako je A $m \times n$ matrica za koju vrijedi $\mathrm{rang}(A) = r$ tada

$\dim(\mathrm{im}(A)) = r$ $\qquad$ $\dim(\mathrm{im}(A^T)) = r$

$\dim(\ker(A)) = n - r$ $\qquad$ $\dim(\ker(A^T)) = m - r$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot (-3)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \underset{III_v : (-5)}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \overset{\mathrm{rang}(A) = 2}{\Longrightarrow} \begin{aligned} \dim(\ker(A)) &= 4 - 2 = 2 \\ \dim(\mathrm{im}(A)) &= 2 \\ \dim(\mathrm{im}(A^T)) &= 2 \\ \dim(\ker(A^T)) &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Od ranije znamo
- osnovne kolone od A formiraju bazu za $\mathrm{im}(A)$
- nenula redovi od U formiraju bazu za $\mathrm{im}(A^T)$

Odrediti dimenziju svakog od sljedećih vektorskih prostora
(a) prostor polinoma koji imaju stepen n ili manje
(b) prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica
(c) prostor $n\times n$ simetričnih matrica

R:

dim V = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

a) Prostor polinoma koji imaju stepen n ili manje je oblika

$P_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

Posmatrajmo skup polinoma $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$. Da li je ovo linearno nezavisan skup? Drugim riječima da li postoje koeficijenti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ takvi da jednakost

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n = 0$$

vrijedi za svako $x \in \mathbb{R}$?
(Prisjetimo se polinom n-tog stepena može imati najviše n korijena)
Prema tome skup $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ je linearno nezavisan.
Da li je ovo najveći linearno nezavisni podskup skupa svih polinoma stepena n ili manje?
Primjetimo da za proizvoljan polinom $g(x) \in P_n[x]$ imamo da

$$g(x) \in span\{1, x, \dots, x^n\}$$

$$\dim(P_n[x]) = n+1.$$

b) Posmatrajmo sljedeći skup od $m\cdot n$ matrica

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&&\vdots\\0&0&0&&\cdots&0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right\}.$$

Da li je ovaj skup linearno nezavisan?
Ako posmatramo sistem

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix} + \dots + \alpha_{mn}\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

nije teško vidjeti da je jedino rješenje ovog sistema trivijalno rješenje.
Iz datog skupa se odmah vidi da ne postoji veći linearno nezavisni podskup od $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\dim(Mat_{m\times n}(\mathbb{R})) = m\cdot n$$

c) Svaku simetričnu matricu određuju elementi ispod ili iznad glavne dijagonale. Posmatrajmo skup

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right\}$$

Ovaj skup ima

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

elemenata. Nije teško vidjeti da je ovo najveći linearno nezavisni podskup skupa svih simetričnih matrica.

$$\dim(\text{prostora svih } n\times n \text{ simetričnih matrica}) = \frac{n^2+n}{2}$$

(#) Posmatrajmo sljedeću matricu i kolona vektor

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix} \quad i \quad v=\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix}.$$

Provjeriti da li $v\in ker(A)$, pa onda proširiti $\{v\}$ do baze za $ker(A)$.

Rj. $ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$

Kako je $Av=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ to $v\in ker(A)$.

Pronađimo prvo bazu za $ker(A)$. Posmatrajmo sistem $Ax=0$.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&-5&5&-10\end{bmatrix}\overset{III_v:(-5)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\overset{III_v+II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rang\,A=2 \Rightarrow \begin{array}{l}x_1+2x_2+2x_3+\quad +5x_5=0\\ \qquad\qquad -x_3+x_4-2x_5=0\end{array}$$

$5-2=3$ nepoznate uzimamo proizvoljno

$x_4=s,\ x_5=t \Rightarrow x_3=x_4-2x_5=s-2t$

$x_2=u$

$\Rightarrow x_1=-2u-2(s-2t)-5t=-2u-2s-t$

Rješenje homogenog sistema je

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2u-2s-t\\u\\s-2t\\s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2u\\u\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2s\\0\\s\\s\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t\\0\\-2t\\0\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}t$$

Jedna od baza za $ker(A)$ je $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}.$

Posmatrajmo sad matricu B

$$B=\begin{bmatrix}-8&-2&-2&-1\\1&1&0&0\\3&0&1&-2\\3&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

u kojoj je prva kolona vektor v a ostale tri kolone su baza od $ker(A)$.

Primjetimo da je $im(B)=ker(A)$ (ZAŠTO: $im(B)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice B)

Od ranije znamo

osnovne kolone u B generišu $im(B)$.

(primjetimo da će $\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix}$ biti osnovna kolona u B).

$$B=\begin{bmatrix}-8&-2&-2&-1\\1&1&0&0\\3&0&1&-2\\3&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{I_v:8}{\sim}\begin{bmatrix}-1&-\frac14&-\frac14&-\frac18\\1&1&0&0\\3&0&1&-2\\3&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\underset{\substack{III_v+I_v\cdot 3\\ IV_v+I_v\cdot 3}}{\overset{II_v+I_v}{\sim}}\begin{bmatrix}-1&-\frac14&-\frac14&-\frac18\\0&3/4&-1/4&-1/8\\0&-3/4&1/4&-19/8\\0&-3/4&1/4&-3/8\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{IV_v+II_v}{\overset{III_v+II_v}{\sim}}\begin{bmatrix}-1&-1/4&-1/4&-1/8\\0&3/4&-1/4&-1/8\\0&0&0&-5/2\\0&0&0&-1/2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\underset{IV_v\cdot(-2)}{\overset{III_v\cdot\frac25}{\sim}}\begin{bmatrix}-1&-1/4&-1/4&-1/8\\0&3/4&-1/4&-1/8\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\underset{V_v+III_v}{\overset{IV_v+III_v}{\sim}}\begin{bmatrix}\boxed{-1}&-1/4&-1/4&-1/8\\0&\boxed{3/4}&-1/4&-1/8\\0&0&0&\boxed{-1}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Osnovne kolone u B su $\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$ i one generišu $im(B)$

Skup $\{v\}$ proširen do baze za $ker(A)$ je

$$\left\{\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

(#) Odrediti da li je skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ baza prostora generisanog skupom $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.

$$\operatorname{span}\mathcal{B}=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2&1\\3&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\{B\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}^2\}=im(B)$$

$$\operatorname{span}\mathcal{A}=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\{A\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}^3\}=im(A) \quad \text{gdje je} \quad A=\begin{bmatrix}1&5&3\\2&8&4\\3&7&1\end{bmatrix}$$

Prema tome $\operatorname{span}(\mathcal{B})=im(B)$ i $\operatorname{span}(\mathcal{A})=im(A)$.

Ako vektore iz $\mathcal{B}$ postavimo kao redove matrice M i vektore iz $\mathcal{A}$ postavimo kao redove matric N imaćemo

$$M=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&8&7\\3&4&1\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}2&3&2\\1&1&-1\end{bmatrix} \quad i$$

$$\operatorname{span}(\mathcal{B})=im(M^T) \quad i \quad \operatorname{span}(\mathcal{A})=(N^T).$$

Od ranije znamo

$$\underline{im(M^T)=im(N^T) \quad \text{akko} \quad M\overset{red}{\sim}N}$$

$$M=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&8&7\\3&4&1\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-5)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-8\\0&-2&-8\end{bmatrix}\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-8\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{II_v:(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v+II_v(-2)}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}=E_M \quad \text{reducirana red ešelon matrica matrice } M$$

$$N=\begin{bmatrix}2&3&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\overset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&2\end{bmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&4\end{bmatrix}\overset{I_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}=E_N$$

Kako se nenula redovi u E_N i E_M poklapaju to je $im(M^T)=im(N^T)$ a time možemo zaključiti da je $\operatorname{span}(\mathcal{A})=\operatorname{span}(\mathcal{B})$ tj. skup $\mathcal{B}$ je baza prostora generisanog skupom $\mathcal{A}$.

(Nije teško pokazati da $\operatorname{span}(\mathcal{B})$ ima dimenziju 2).

Neka je $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ baza za vektorski prostor V. Pokazati da se svaki $v\in V$ može izraziti kao linearna kombinacija od b_i-ova

$$v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n$$

na samo jedan način – tj. koordinate α_i su jedinstvene.

Rj.

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.

Kako $\mathcal{B}$ generiše V to za $\forall v\in V$ $\exists \alpha_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\dots,n$ t.d. $v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n$.

Pokažimo da je prikaz jedinstven. Ako bi postojali koeficijenti $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ t.d.

$$v=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\dots+\beta_n b_n$$

imali bi

$$0=v-v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n-(\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\dots+\beta_n b_n)=$$

$$=(\alpha_1-\beta_1)b_1+(\alpha_2-\beta_2)b_2+\dots+(\alpha_n-\beta_n)b_n$$

a kako je $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ linearno nezavisan skup, gornja homogena jednačina je tačna akko

$$\alpha_i-\beta_i=0 \text{ za svaki } i=1,2,\dots,n, \text{ tj. } \alpha_i=\beta_i.$$

Prema tome koordinate α_i su jedinstvene.

Konstruisati 4×4 homogeni sistem jednačina koji nema nula koeficijente i koji ima tri linearno nezavisna rješenja.

Rj. Homogeni sistem jednačina koje tražimo će biti oblika

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=0\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4&=0\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{32}x_3+a_{34}x_4&=0\\
a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4&=0
\end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Prisjetimo se $\ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$

Ako je $\dim(\ker(A))=1$ sistem će imati jedno linearno nezavisno rješenje.

Sistem će imati tri linearno nezavisna rješenja akko $\dim(\ker(A))=3$.

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

$$\operatorname{rang}(A)=r \Rightarrow \dim(\operatorname{im}(A))=r,\quad \dim(\ker(A))=n-r$$

gdje je $A_{m\times n}$

Sad imamo

$$3=\dim(\ker(A))=n-r=4-\operatorname{rang}(A)\Rightarrow \operatorname{rang}(A)=1$$

Prema tome bilo koja matrica ranga jedan sa ne nula elementima će biti rješenje (npr. $A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\2&2&2&4\\1&1&1&2\\3&3&3&6\end{bmatrix}$)

Ako je $\mathcal{S}_r = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ linearno nezavisan podskup n-dimenzionalnog prostora $\mathcal{V}$, gdje je $r<n$, objasniti zašto je moguće pronaći dodatne vektore $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ iz $\mathcal{V}$ takve da je

$$\mathcal{S}_n = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

baza za $\mathcal{V}$.

Rj.

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo **baza** za $\mathcal{V}$.

$\dim \mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za $\mathcal{V}$

Kako je $r<n$ i $\dim(\mathcal{V}) = n$ to znači $span(\mathcal{S}_r) \neq \mathcal{V}$, pa postoji vektor $v_{r+1} \in \mathcal{V}$ takav da $v_{r+1} \notin span(\mathcal{S}_r)$.
Prošireni skup $\mathcal{S}_{r+1} = \mathcal{S}_r \cup \{v_{r+1}\}$ je nezavisan podskup od $\mathcal{V}$ (u suprotnom $\mathcal{S}_r \cup \{v_{r+1}\}$ bi bio zavisan skup pa $\exists \alpha_i$ t.d. $v_{r+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \Rightarrow v_{r+1} \in span(\mathcal{S}_r)$)
#kontradikcija

i $\mathcal{S}_{r+1}$ sadrži $r+1$ vektor. Ponavljajući ovaj proces generisaćemo nezavisne podskupove $\mathcal{S}_{r+2}, \mathcal{S}_{r+3}, \dots$ i na kraju doći do maksimalnog nezavisnog podskupa $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{V}$ koji će sadržavati n vektora.

Proširiti nezavisan skup $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Rj. Znamo da je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ (ZAŠTO?). Sad posmatrajmo matricu A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

u kojoj su prve dvije kolone vektori iz $\mathcal{S}$, a ostale kolone vektori iz baze od $\mathbb{R}^4$.
Jasno je da $im(A) = \mathcal{V}$ (ZAŠTO? $im(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A.)
Iz ranijih lekcija znamo

osnovne kolone u A generišu $im(A)$

Primjetimo da će $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ biti osnovne kolone u A zato što ni jedna od njih nije linearna kombinacija prethodnih. Prema tome, preostalih 4-2 osnovnih kolona moraju biti podskup od $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
(osnovne kolone od A su kolone u A koje sadrže pivot pozicije).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{IV_v + I_v \cdot (-2)}{\overset{III_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{IV_v + II_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*4}, A_{*5}\} \text{ su osnovne kolone u } A$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ je baza za } \mathbb{R}^4 \text{ koja sadrži } \mathcal{S}.$$

$\#$ Za $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ i podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ od ranije znamo da je slika $A(\mathcal{S}) = \{Ax \mid x \in \mathcal{S}\}$ od $\mathcal{S}$ pod A podprostor od $\mathbb{R}^m$. Pokazati da, ako je $\mathcal{S} \cap \ker(A) = \mathbf{0}$ tada je $\dim A(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S})$.

Uputa: Iskoristiti bazu $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ za $\mathcal{S}$ da bi odredili bazu za $A(\mathcal{S})$.

Rj. Neka je $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ baza za $\mathcal{S}$. To znači da $\operatorname{span}\{s_1, s_2, \dots, s_k\} = \mathcal{S}$ i skup $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ je linearno nezav.

Prvo pokažimo da je $\operatorname{span}\{As_1, As_2, \dots, As_k\} = A(\mathcal{S})$.

$x \in \operatorname{span}\{As_1, As_2, \dots, As_k\} \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.d. $x = \alpha_1 As_1 + \dots + \alpha_k As_k$

$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ $x = A(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k) \iff s = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k \in \mathcal{S}$ za neke $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.d. $x = As \iff x \in A(\mathcal{S})$

Prema tome vrijedi $\operatorname{span}\{As_1, As_2, \dots, As_k\} = A(\mathcal{S})$.

Pokažimo još da je skup $\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ linearno nezavisan.

Posmatrajmo jednačinu $\alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \dots + \alpha_k As_k = 0$

$$\underbrace{A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_k s_k)}_{\in \mathcal{S}} = 0$$

i $\in \ker(A)$

$\Rightarrow \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_k s_k \in \mathcal{S} \cap \ker(A) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

zato što je $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ liner. nezav.

Prema tome $\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ je linearno nezavisan skup koji generiše $A(\mathcal{S}) \Rightarrow \{As_1, \dots, As_k\}$ je baza za $A(\mathcal{S}) \Rightarrow \dim(A(\mathcal{S})) = k = \dim(\mathcal{S})$

q.e.d.

$\#$ Pokazati da je $\operatorname{rang}(A+B) \le \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

Rj. $\operatorname{im}(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Pokažimo da je $\operatorname{im}(A+B) \subseteq \operatorname{im}(A) + \operatorname{im}(B)$.

Izaberimo proizvoljan $b \in \operatorname{im}(A+B)$. Tada postoji vektor x takav da

$$b = (A+B)x = Ax + Bx \in \operatorname{im}(A) + \operatorname{im}(B)$$

Prema tome $\operatorname{im}(A+B) \subseteq \operatorname{im}(A) + \operatorname{im}(B)$.

Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ vektorski prostori, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \dim \mathcal{M} \le \dim \mathcal{N}$

$\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ $\Rightarrow \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$

Sad imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(A+B) = \dim(\operatorname{im}(A+B)) &\overset{\operatorname{im}(A+B) \subseteq \operatorname{im}(A) + \operatorname{im} B}{\le} \dim(\operatorname{im}(A) + \operatorname{im}(B)) \\
&= \dim \operatorname{im}(A) + \dim \operatorname{im}(B) - \dim(\operatorname{im}(A) \cap \operatorname{im}(B)) \\
&\le \dim \operatorname{im}(A) + \dim \operatorname{im}(B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Jasno je

$\dim \operatorname{im}(A) = \operatorname{rang}(A)$,

Objasniti zašto je $|\text{rang}(A)-\text{rang}(B)| \leq \text{rang}(A-B)$.

Rj. U jednom od ranijih zadataka smo pokazali da

$$\underline{\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)}$$

Sad imamo

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A-B+B) \leq \text{rang}(A-B) + \text{rang}(B)$$

$$\Rightarrow \quad \text{rang}(A) - \text{rang}(B) \leq \text{rang}(A-B) \quad \dots (*)$$

$$\text{rang}(B) = \text{rang}(B-A+A) \leq \text{rang}(B-A) + \text{rang}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \text{rang}(B) - \text{rang}(A) \leq \text{rang}(B-A)$$

$$\Rightarrow \quad -(\text{rang}(A) - \text{rang}(B)) \leq \text{rang}(A-B) \quad \dots (**)$$

$$(*) \text{ i } (**) \quad \Rightarrow \quad |\text{rang}(A) - \text{rang}(B)| \leq \text{rang}(A-B)$$

q.e.d.

od ranije znamo

$$\underline{\text{rang}(A) = r \iff \dim(\text{im}(A)) = r}$$

Ako je $\text{rang}(A_{m\times n}) = r$ i $\text{rang}(E_{m\times n}) = k \leq r$ objasniti zašto

$$r-k \leq \text{rang}(A+E) \leq r+k.$$

Drugim riječima, ovo kaže da nametanjem ranga k može promjeniti rang za najviše k.

Rj. U jednom od ranijih zadataka smo pokazali

$$\underline{\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)} \quad \dots (\square)$$

isto tako smo pokazali da

$$\underline{|\text{rang}(A) - \text{rang}(B)| \leq \text{rang}(A-B)} \quad \dots (\square\square)$$

Sad imamo

$$\text{rang}(A+E) \overset{(\square)}{\leq} \text{rang}(A) + \text{rang}(E) = r+k$$

$$\text{rang}(A+E) = \text{rang}(A-(-E)) \overset{(\square\square)}{\geq} \text{rang}(A) - \text{rang}(-E) = r-k$$

$$\Rightarrow \quad r-k \leq \text{rang}(A+E) \leq r+k$$

q.e.d.

(#) Objasniti zašto svaki nenula podprostor $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ mora posjedovati bazu.

Rj.

Neka je $\mathcal{V}$ nenula podprostor. To znači da postoji vektor v_1 t.d. $v_1 \in \mathcal{V}$.

Ako je $span\{v_1\} = \mathcal{V}$ dokaz je završen.

Ako $span\{v_1\} \neq \mathcal{V}$ to znači da $\exists v_2 \in \mathcal{V}$ t.d. $v_2 \notin span\{v_1\}$. Skup $\{v_1, v_2\}$ je linearno nezavisan skup.

Ako je $span\{v_1, v_2\} = \mathcal{V}$ dokaz je završen, $\{v_1, v_2\}$ je baza za $\mathcal{V}$.

Ako je $span\{v_1, v_2\} \neq \mathcal{V}$ tada $\exists v_3 \in \mathcal{V}$ t.d. $v_3 \notin span\{v_1, v_2\}$

...

Nastavljajući ovaj proces, doći ćemo do nekog broja k t.d. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearno nezavisan skup i da $span\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \mathcal{V}$. Drugim riječima $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je baza za $\mathcal{V}$.

Da se proces mora završiti garantuje dimenzija od $\mathbb{R}^n$

$dim(\mathbb{R}^n) = n$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od $\mathcal{V}$.

Zadaci za vježbu

(1.) Ako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ podskupovi prostora $\mathcal{V}$, objasniti zašto $dim(span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})) = dim(span(\mathcal{M})) + dim(span(\mathcal{N})) - dim(span(\mathcal{M}) \cap span(\mathcal{N}))$.

(2.) Posmatrajmo dvije matrice $A_{m \times n}$ i $B_{m \times k}$.

(a) Objasniti zašto
$$rang(A \mid B) = rang(A) + rang(B) - dim(im(A) \cap im(B)).$$

(b) Objasniti zašto
$$dim(ker(A \mid B)) = dim\, ker(A) + dim\, ker(B) + dim(im(A) \cap im(B))$$

(c) Odrediti $dim(im(C) \cap ker(C))$ i $dim(im(C) + ker(C))$ za
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(3.) Pretpostavimo da je matrica A sa m redova takva da sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^m$. Objasniti zašto ovo znači da A mora biti kvadratna i nesingularna.

(4.) Neka je $\mathcal{S}$ skup rješenja za saglasan sistem linearnih jednačina $Ax = b$.

(a) Ako je $\mathcal{S}_{max} = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ najveći nezavisni podskup od $\mathcal{S}$, i ako je p bilo koje određeno rješenje, dokazati da
$$span(\mathcal{S}_{max}) = span\{p\} + ker(A).$$

(b) Ako $b \neq 0$ i $rang(A_{m \times n}) = r$, objasniti zašto $Ax = b$ ima $n - r + 1$ "nezavisno rješenje".

5. Linearne transformacije

(5.01) Linearne transformacije

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ (za nas to je polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$).

• <u>*Linearna transformacija*</u> sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je definisana kao linearna funkcija T koja preslikava $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$. Tj.

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{i} \quad T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

ili ekvivalentno

$$T(\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{za sve } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{U},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

• <u>*Linearni operator*</u> na $\mathcal{U}$ je definisana kao linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u sebe, tj., linearna funkcija koja preslikava $\mathcal{U}$ nazad u $\mathcal{U}$. ◇

(5.02) Koordinate vektora

Neka je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{U}$, i neka je $\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$. Koeficijente α_i u razlaganju $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + ... + \alpha_n\boldsymbol{u}_n$ se zovu <u>*koordinate od* $\boldsymbol{v}$ *u odnosu na bazu* $\mathcal{B}$</u>, i od sad pa nadalje, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ će označavati kolona vektor

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Oprez! Poredak je važan. Ako je $\mathcal{B}'$ permutacija od $\mathcal{B}$, tada je $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'}$ odgovarajuća permutacija od $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$. ◇

(5.03) Prostor linearnih transformacija

• Za svaki par vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$, skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

• Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa $B_{ji}(\boldsymbol{u}) = \xi_j\boldsymbol{v}_i$, gdje je $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^\top = [\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$. To jest, izaberemo j^{tu} koordinatu od $\boldsymbol{u}$ i prikačimo je na $\boldsymbol{v}_i$.

▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{B_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ je baza za $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

▷ $\dim\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = (\dim\mathcal{U})(\dim\mathcal{V})$. ◇

(5.04) Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. <u>*Matrica koordinata*</u> od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(\boldsymbol{u}_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(\boldsymbol{u}_2)]_{\mathcal{B}'} & ... & [T(\boldsymbol{u}_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Drugim riječima, ako je $T(\boldsymbol{u}_j) = \alpha_{1j}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{2j}\boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_{mj}\boldsymbol{v}_m$, tada

$$[T(\boldsymbol{u}_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, i kada je samo jedna baza u igri, umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ da označi (kvadratnu) matricu koordinata od T u odnosu na $\mathcal{B}$. ◇

(5.05) Djelovanje kao množenje matricom

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svako $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$, djelovanje od T na $\boldsymbol{u}$ je dato pomoću množenja matrice sa koordinatama u smislu da

$$[T(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$$

◇

(5.06) Veza sa algebrom matrica

• Ako su $T, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada

▷ $[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ za sve skalare α,

▷ $[T+L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

• Ako su $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$, i ako su $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$, redom, baze za $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ tada $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{W})$, i

▷ $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

• Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ invertibilna u smislu da $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ za neki $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ iz $\mathcal{U}$

▷ $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$. ◇

\# Definišimo f-ju $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ sa $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix}$ za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Pokazati da je T linearna transformacija.

Rj. Prema definiciji linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je linearna f-ja T koja preslikava vekt. prost. $\mathcal{U}$ u vekt. prost. $\mathcal{V}$, tj.

$$\underline{T(x+y)=T(x)+T(y) \quad \text{i} \quad T(\alpha x)=\alpha T(x) \quad \text{za } \forall x,y\in\mathcal{U}\ \forall \alpha\in\mathbb{R}}$$

Za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ imamo:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}x+x_1\\y+y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x+x_1)+(y+y_1)\\(x+x_1)-2(y+y_1)\\3(x+x_1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-2y_1\\3x_1\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

što znači da vrijedi prva osobina

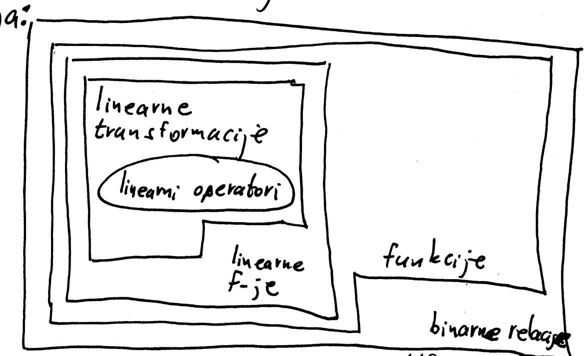
Za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha x-2\alpha y\\3\alpha x\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix}=\alpha T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

vrijedi druga osobina

Jasno je da su $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ vektorski prostor. Prema tome, T čuva sabiranje i skalarno množenje i preslikava jedan vekt. prost. u drugi, pa je linearna transformacija.

Napomena:



orjentaciona šema

\# Neka je A proizvoljna $m\times n$ matrica. Matrična transformacija $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ je definisana sa

$$T_A(x)=Ax$$

za svaku kolonu $x\in\mathbb{R}^n$. Pokazati da je T_A linearna transformacija.

Rj. Prema definiciji linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je f-ja koja preslikava vekt. prost. $\mathcal{U}$ u vekt. prost. $\mathcal{V}$ za koju vrijedi

$$\underline{T(x+y)=T(x)+T(y) \quad \text{i} \quad T(\alpha x)=\alpha T(x) \quad \text{za } \forall x,y\in\mathcal{U}\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

U našem slučaju za svako $x,y\in\mathbb{R}^n$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ imamo

$$T_A(x+y)=A(x+y)=Ax+Ay=T_A(x)+T_A(y),$$

$$T_A(\alpha x)=A(\alpha x)=\alpha(Ax)=\alpha T_A(x),$$ $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ su vekt. prost.

Prema tome T_A je linearna transformacija.

Odrediti koje od sljedećih f-ja su linearni operatori na $\mathbb{R}^2$.

a) $T(x,y)=(x,1+y)$,
b) $T(x,y)=(0,xy)$,
c) $T(x,y)=(x, \sin y)$.

Rj: Prema definiciji, linearni operator na $\mathcal{U}$ je linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ nazad u $\mathcal{U}$ tj. f-ja za koju vrijedi $T(x,y)=T(x)+T(y)$ i $T(\alpha \cdot x)=\alpha T(x)$ za svako $x,y\in\mathcal{U}$ i $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

a) $T(x,y)=(x,1+y)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1,1+y+y_1)=$$
$$=(x,1+y)+(x_1,y_1)=T(x,y)+(x_1,y_1)$$

Prva osobina nije zadovoljena.
T nije linearni operator na $\mathbb{R}^2$

b) $T(x,y)=(0,xy)$.

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(0,(x+x_1)(y+y_1))=$$
$$=(0,xy+xy_1+x_1y+x_1y_1)=(0,xy)+(0,x_1y_1)+(0,xy_1+x_1y)$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)+(0,xy_1+x_1y)$$

Prva osobina nije zadovoljena. T nije linearni operator.

c) $T(x,y)=(x,\sin y)$. Za proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ imamo

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1,\sin(y+y_1))=$$
$$=(x+x_1,\sin y\cos y_1+\sin y_1\cos y)=(x,\sin y\cos y_1)+(x_1,\sin y_1\cos y)$$

Prva osob. nije zad. T nije lin. oper..

Odrediti koje od sljedećih f-ja su linearni operatori na $\mathbb{R}^2$.

a) $T(x,y)=(y,x)$
b) $T(x,y)=(x^2,y^2)$
c) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

Rj: Prema definiciji, linearni operator na $\mathcal{U}$ je linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$ tj. f-ja sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$ t.d. za $\forall x,y\in\mathcal{U}$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $T(x,y)=T(x)+T(y)$ i $T(\alpha x)=\alpha T(x)$.

a) $T(x,y)=(y,x)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ i proizvoljno $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(y+y_1,x+x_1)=(y,x)+(y_1,x_1)=$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)$$ vrijedi prva osobina

$$T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=(\alpha y,\alpha x)=\alpha(y,x)=\alpha T(x,y).$$ vrijedi druga osobina

T jest linearni operator

b) $T(x,y)=(x^2,y^2)$. Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=((x+x_1)^2,(y+y_1)^2)=$$
$$=(x^2+2xx_1+x_1^2,y^2+2yy_1+y_1^2)=(x^2,y^2)+(x_1^2,y_1^2)+(2xx_1,2yy_1)=$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)+(2xx_1,2yy_1)$$

Prva osobina nije zadovoljena. T nije linearni operator.

c) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ i proizvoljno $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1+y+y_1,x+x_1-(y+y_1))=\ldots$$

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU ...

T jest linearni operator

Objasniti zašto je $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ za svaku linearnu transformaciju T.

Rj. T je linearna transformacija, pa

$\forall x,y \quad T(x+y)=T(x)+T(y)$

$\forall x\ \forall \alpha\in\mathbb{R} \quad T(\alpha x)=\alpha T(x)$ (pa je $T(-x)=T((-1)x)=(-1)T(x)=-T(x)$)

Sad imamo, za proizvoljno x

$$T(\mathbf{0})=T(x+(-x))=T(x)+T(-x)=T(x)-T(x)=\mathbf{0}$$

q.e.d.

Neka je v fiksirani vektor iz $\mathbb{R}^n$ ($v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$, $v_i\in\mathbb{R}$) i neka je $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ preslikavanje definisano sa $T(x)=v^Tx$ (tj. standardni unitarni proizvod $T(x)=v_1x_1+v_2x_2+\dots+v_nx_n$)

(a) Da li je T linearni operator?

(b) Da li je T linearna transformacija?

Rj.

a) T ne može biti linearni operator zato što linearni operator vektorski prostor preslikava u isti vektorski prostor. U ovom slučaju morali bi imati da se $\mathbb{R}^n$ preslikava ponovo u $\mathbb{R}^n$.

T nije linearni operator.

b) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ jest vektorski prostor (poznato od ranije). Baza za $\mathbb{R}^n$?

Da li je $\mathbb{R}$ vektorski prostor? Jest (ZAŠTO?). Baza za $\mathbb{R}$?

Šta je vektorsko sabiranje a šta skalarno množenje u $\mathbb{R}$?

Ostaje nam još da provjerimo da li je $T(x)=v^Tx$ linearna f-ja.

Izaberimo proizvoljne $x,y\in\mathbb{R}^n$ i proizvoljno $\alpha\in\mathbb{R}$

$T(x+y)=v^T(x+y)=v^Tx+v^Ty=T(x)+T(y)$ vrijedi prva osobina

$T(\alpha x)=v^T(\alpha x)=\alpha v^Tx=\alpha T(x)$ vrijedi druga osobina

T jest linearna transformacija.

Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ odrediti koja od sljedećih f-ja su linearne transformacije.

a) $T(X_{n\times n}) = AX - XA$

b) $T(A) = A^T$

Rj. <u>Linearna f-ja T koja preslikava vektorski prostor U u vektorski prostor V zovemo linearna transformacija.</u>

a) Iz postavke vidimo da $T: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Provjerimo da li je $T(X) = AX - XA$ linearna f-ja.

$\forall X, Y \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX - XA + AY - YA$$
$$= T(X) + T(Y) \quad \text{vrijedi prva osobina}$$

$$T(\alpha X) = A(\alpha X) - (\alpha XA) = \alpha(AX - XA) = \alpha T(X) \quad \text{vrijedi druga osobina}$$

Prema tome T je linearna transformacija a kako preslikava $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ u $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, T je linearni operator.

b) Iz postavke vidimo $T: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Provjerimo da li je $T(A) = A^T$ linearna f-ja.

$\forall X, Y \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(X+Y) = (X+Y)^T = X^T + Y^T \quad \text{vrijedi prva osobina}$$
$$T(\alpha X) = (\alpha X)^T = \alpha X^T \quad \text{vrijedi druga osobina}$$

T jest linearna f-ja, sa $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazad u $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Kako je $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ vektorski prostor T je linearni operator

Odrediti koja od sljedećih preslikavanja su linearni operatori na $\mathcal{P}_n$ vektorskom prostoru svih polinoma stepena n ili manje.

a) $T = \xi_k D^k + \xi_{k-1} D^{k-1} + \ldots + \xi_1 D + \xi_0 I$ gdje je D^k diferencijalni operator k-tog reda (tj. $D^k p(x) = \frac{d^k p}{dx^k}$)

b) $T(p(x)) = x^n p'(0) + x$

Rj.

Linearni operator na $\mathcal{P}_n$ je linearna f-ja koja preslikava $\mathcal{P}_n$ u $\mathcal{P}_n$. Provjerimo da li su date f-je linearne.

$$\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

a) $\forall p(x), g(x) \in \mathcal{P}_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(p(x) + g(x)) = \xi_k D^k(p(x)+g(x)) + \xi_{k-1} D^{k-1}(p(x)+g(x)) + \ldots +$$
$$+ \xi_1 D(p(x)+g(x)) + \xi_0 I(p(x)+g(x)) =$$
$$= \xi_k D^k p(x) + \xi_{k-1} D^{k-1} p(x) + \ldots + \xi_1 D p(x) + \xi_0 I p(x)$$
$$+ \xi_k D^k g(x) + \xi_{k-1} D^{k-1} g(x) + \ldots + \xi_1 D g(x) + \xi_0 I g(x)$$
$$= T(p(x)) + T(g(x))$$

$$T(\alpha p(x)) = \xi_k D^k(\alpha p(x)) + \xi_{k-1} D^{k-1}(\alpha p(x)) + \ldots + \xi_1 D(\alpha p(x)) + I(\alpha p(x))$$
$$= \alpha\left(\xi_k D^k p(x) + \ldots + \xi_1 D p(x) + I p(x)\right) = \alpha T(x)$$

Obe osobine su zadovoljene. T jest linearni operator.

b) $\forall p(x), g(x) \in \mathcal{P}_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(p(x)+g(x)) = x^n (p+g)'(\ ) + x = x^n p'(0) + x + x^n g'(0)$$
$$= T(p(x)) + x^n g'(0)$$

Prva osobina nije zadovoljena.
T nije linearni operator.

(#) Ako je v vektor u $\mathbb{R}^3$ čije su standardne koordinate $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, odrediti koordinate od v u odnosu na bazu

$$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Napomena: Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj. $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 8e_1 + 7e_2 + 4e_3$

Ono što tražimo u zadatku su tri nepoznate α_1, α_2 i α_3 takve da $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \end{array}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v \cdot (-1)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{I_v - II_v}{\overset{II_v - III_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = 9, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = -3$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Neka je $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linearna transformacija definisana sa $T(x,y) = (x+3y,\ 0,\ 2x-4y)$.

a) Odrediti $[T]_{\varphi\varphi'}$, gdje su φ i φ' standardne baze, redom, za $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

b) Odrediti $[T]_{\varphi\varphi''}$ gdje je φ'' baza za $\mathbb{R}^3$ dobijena permutacijom standardne baze, naime $\varphi'' = \{e_3, e_2, e_1\}$.

Rj. Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\{(1,0), (0,1)\}$.
Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
$\varphi = \{(1,0),(0,1)\}$, $\varphi' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\varphi'' = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v \in \mathcal{U}$. Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ obilježavamo sa $[v]_{\mathcal{B}}$, što predstavlja kolona vektor $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ gdje su koeficijenti α_i uzeti iz razvoja $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ (ovaj razvoj je jedinstveno određen).

Sa $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ obilježimo skup svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$. $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ je vektorski prostor.

Kako je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ vektorski prostor to on posjeduje nekakvu bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ pa ima smisla govoriti o koordinatama transformacije $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$.

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ takva da

$$T(u_j) = \alpha_{1j} v_1 + \alpha_{2j} v_2 + \dots + \alpha_{mj} v_m$$

drugim riječima $[T(u_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

a)
$T(x,y) = (x+3y,\ 0,\ 2x-4y)$
Da bi odredili $[T]_{\varphi\varphi'}$ trebamo odrediti koordinate vektora $T(1,0)$ i $T(0,1)$ u odnosu na bazu $\varphi' = \{\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}\}$.

$T(1,0) = (1,0,2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 e_3$
$T(0,1) = (3,0,-4) = 3 e_1 + 0 \cdot e_2 + (-4) e_3$

Matrica koordinata je $[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) Da bi odredili $[T]_{\varphi\varphi''}$ trebamo odrediti koordinate vektora $T(1,0)$ i $T(0,1)$ u odnosu na bazu $\varphi'' = \{e_3 = (0,0,1), e_2, e_1\}$

$T(1,0) = (1,0,2) = 2 \cdot e_3 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$
$T(0,1) = (3,0,-4) = -4 e_3 + 0 e_2 + 3 e_1$

Matrica koordinata je $[T]_{\varphi\varphi''} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(#) Neka je P linearni operator na $\mathbb{R}^3$ definisan sa $\forall v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $P(v)=(x,y,0)$. Odrediti $[P]_{\mathcal{B}}$ (matricu koordinata u odnosu na bazu $\mathcal{B}$) gdje je

$$\mathcal{B}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. Neka je $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v\in\mathcal{U}$. Koeficijente α_i u razvoju

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$$

zovemo koordinate od v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i označavamo $[v]_{\mathcal{B}}$, $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$.

Neka je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ skup svih linearnih operatora na $\mathcal{U}$ (linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$).
Znamo da je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ vektorski prostor, $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ ima neku bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, pa možemo pričati o koordinatama proizvoljnog operatora $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, što označavamo $[T]_{\mathcal{B}}$.

Matrica koordinata za $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ je

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}|&|&&|\\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}}\\ |&|&&|\end{pmatrix}$$

Drugim riječima ako je $T(u_j)=\alpha_{1j}u_1+\alpha_{2j}u_2+\dots+\alpha_{nj}u_n$

tada $[T(u_j)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\\alpha_{2j}\\\vdots\\\alpha_{nj}\end{pmatrix}$

Rj. Trebamo odrediti matricu

$$[P]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}|&|&&|\\ [P(u_1)]_{\mathcal{B}} & [P(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [P(u_n)]_{\mathcal{B}}\\ |&|&&|\end{pmatrix}$$

$$P(u_1)=P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}u_1+u_2-u_3\implies[P(u_1)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

Tražimo α,β i γ t.d. $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$

rješenje $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-1$ ...(*)

$$P(u_2)=P\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\overset{(**)}{=}0u_1+3u_2-2u_3\implies[P(u_2)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},$$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ tj. tražim α,β i γ t.d. $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

rješenje $\alpha=0$, $\beta=3$, $\gamma=-2$ ...(**)

$$P(u_3)=P\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\overset{(***)}{=}0u_1+3u_2-2u_3\implies[P(u_3)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

rješenje: $\alpha=0$, $\beta=3$, $\gamma=-2$ ...(***)

Matrica koordinata je

$$[P]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&3\\-1&-2&-2\end{pmatrix}.$$

(#) Za operator $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisan sa

$$T(x,y) = (x+y,\ -2x+4y)$$

odrediti $[T]_{\mathcal{B}}$, gdje je $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.: Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v \in \mathcal{U}$. Koeficijenti α_i u proširenju

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

zovemo koordinate od v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i obilježavamo sa $[v]_{\mathcal{B}}$, i tumačimo kao kolona vektor

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

Skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ svih linearnih operatora na $\mathcal{U}$ je vektorski prostor. Kako je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ vektorski prostor to on posjeduje bazu.

Skup $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_1, B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2m}, \dots, B_{nn}\}$

$$= \{B_{ji}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

gdje su B_{ji} linearni operatori na $\mathcal{U}$ definisani sa $B_{ji}(u) = \xi_j u_i$, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T = [u]_{\mathcal{B}}$ (izaberemo j-tu koordinatu od u i prikažimo je na u_i)

je baza za $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$.

Sad ima smisla govoriti o koordinatama od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$

Matrica koordinata za $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ je definisana kao $m \times n$ matrica:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Drugim riječima ako je $T(u_j) = \alpha_{1j} u_1 + \alpha_{2j} u_2 + \dots + \alpha_{mj} u_n$ tada $[T(u_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}$.

Data je baza $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = \{u_1, u_2\}$ za $\mathbb{R}^2$

$$T(u_1) = T(1,1) = (2,\ -2+4) = (2,2) = 2(1,1) + 0(1,2) = 2u_1 + 0u_2$$

$$\Rightarrow [T(u_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$T(u_2) = T(1,2) = (1+2,\ -2+8) = (3,6) \overset{(*)}{=} 0(1,1) + 3(1,2) = 0u_1 + 3u_2$$

$$\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \\ -\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 6 \\ \hline -\alpha_2 &= -3 \\ \alpha_2 = 3 &\Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{aligned} \qquad \dots (*)$$

$$\Rightarrow [T(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

Prema tome $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

Neka je T operator na $\mathbb{R}^3$ definisan sa

$$T(x,y,z) = (x-y,\ y-x,\ x-z)^T$$

i posmatrajmo vektor $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ i bazu $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

a) Odrediti $[T]_{\mathcal{B}}$ i $[v]_{\mathcal{B}}$

b) Odrediti $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ i provjeriti da li $[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$

Rj.

Dat je vektor v koji u odnosu na standardnu bazu ima koordinate $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = e_1 + e_2 + 2e_3$.

Da bi odredili $[v]_{\mathcal{B}}$ tražimo koordinate $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ t.d.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Odma vidimo da je rješenje $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ tj. $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Da bi odredili $[T]_{\mathcal{B}} = \Big[\ [T(1,0,1)]_{\mathcal{B}}\ \ [T(0,1,1)]_{\mathcal{B}}\ \ [T(1,1,0)]_{\mathcal{B}}\ \Big]$

potrebno je odrediti koordinate vektora $T(1,0,1)$, $T(0,1,1)$ i $T(1,1,0)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$T(1,0,1) = (1,-1,0)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=0$$

$$T(0,1,1) = (-1,1,-1)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha + \gamma = -1\\ \beta + \gamma = 1\\ \alpha + \beta = -1\end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\1&1&0&-1\end{array}\right] \overset{III_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&1&-1&0\end{array}\right] \overset{III_v + II_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&-2&-1\end{array}\right] \overset{III_v:(-2)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \underset{I_v + III_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + III_v\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = -\frac{3}{2}\\ \beta = 1/2\\ \gamma = 1/2\end{matrix}$$

$$T(1,1,0) = (0,0,1)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha + \gamma = 0\\ \beta + \gamma = 0\\ \alpha + \beta = 1\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ za vježbu $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & -3/2 & 1/2\\ -1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

b) $T(v) = T(1,1,2) = (0,0,-1)^T$

Da bi odredili $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ potrebno je odrediti koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$T(v) = (0,0,-1)^T$ pa tražimo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha + \gamma = 0\\ \beta + \gamma = 0\\ \alpha + \beta = -1\end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&-1\end{array}\right] \overset{III_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&-1&-1\end{array}\right] \overset{III_v + II_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\overset{III_v:(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \underset{I_v + III_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + III_v\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1/2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = -\frac{1}{2}\\ \beta = -\frac{1}{2}\end{matrix} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$$

Data jednakost vrijedi.

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa $B_{ji}(u)=\xi_j v_i$ gdje je $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T=[u]_{\mathcal{B}}$. Pokazati da je skup $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}=\{B_{11},B_{12},\dots,B_{1m},B_{21},B_{22},\dots,B_{2m},\dots,B_{nm}\}$ linearno nezavisan.

Rj. Da bi pokazali linearnu nezavisnost posmatrajmo sistem

$$\eta_{11}B_{11}+\eta_{12}B_{12}+\dots+\eta_{1m}B_{1m}+\eta_{21}B_{21}+\dots+\eta_{nm}B_{nm}=0$$

za skalare η_{ji} i primjetimo da za svaki $u_k\in\mathcal{B}$

$$B_{ji}(u_k)=\begin{cases} v_i, & \text{ako je } j=k\\ 0, & \text{ako je } j\neq k\end{cases}$$

zato što

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+0\cdot u_n\\
u_2 &= 0\cdot u_1+1\cdot u_2+\dots+0\cdot u_n\\
&\;\vdots\\
u_k &= 0\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+1\cdot u_k+\dots+0\cdot u_n\\
&\;\vdots\\
u_n &= 0u_1+0\cdot u_2+\dots+1\cdot u_n.
\end{aligned}$$

Drugim riječima

$$[u_k]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\leftarrow k\text{-ta pozicija}.$$

$$\Rightarrow\quad 0=\Big(\sum_{j,i}\eta_{ji}B_{ji}\Big)(u_k)=\sum_{j,i}\eta_{ji}B_{ji}(u_k)=\sum_{i=1}^{m}\eta_{ki}v_i$$

Za svaki k, nezavisnost od $\mathcal{B}'$ povlači da je $\eta_{ki}=0$ za svaki i, i prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ je linearno nezavisan skup. q.e.d.

Iz teorije Linearne algebre znamo (a to nije teško ni pokazati) da za svaki par vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathbb{R}$, skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$, je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa

$$B_{ji}(u)=\xi_j v_i$$

gdje je $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T=[u]_{\mathcal{B}}$. Dokazati da skup

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}}=\{B_{11},B_{12},\dots,B_{1m},B_{21},B_{22},\dots,B_{2m},\dots,B_{nm}\}$$

generiše $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Rj. Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i odredimo djelovanje od T na proizvoljnom vektoru $u\in\mathcal{U}$.

Kako je $u\in\mathcal{U}$ $\exists!\,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\in\mathbb{R}$ t.d.

$$u=\xi_1u_1+\xi_2u_2+\dots+\xi_nu_n.$$

Dalje $T(u_j)\in\mathcal{V}$ pa $\exists!\,\alpha_{1j},\alpha_{2j},\dots,\alpha_{mj}$ t.d.

$$T(u_j)=\alpha_{1j}v_1+\alpha_{2j}v_2+\dots+\alpha_{mj}v_m$$

Sad imamo $T(u)=T\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_ju_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\xi_jT(u_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}v_i$

$$=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\xi_jv_i=\sum_{i,j}\alpha_{ij}B_{ji}(u).$$

Ovo vrijedi za $\forall u\in\mathcal{U}$ t.d. $T=\sum_{i,j}\alpha_{ij}B_{ji}$ pa $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ generiše $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

(#) Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, neka je T linearni operator na $\mathbb{R}^n$ definisan sa $T(x)=Ax$. Tj. T je operator definisan sa matričnim množenjem. Pokazati da je u odnosu na standardnu bazu φ, $[T]_\varphi = A$.

Rj. Standardna baza za $\mathbb{R}^n$ je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Znamo da

$$[T]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right]_\varphi & [T(e_2)]_\varphi & \cdots & [T(e_n)]_\varphi \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Prema tome trebamo naći koordinate vektora $T(e_1), T(e_2), \dots T(e_n)$ u odnosu na standardnu bazu φ.

$$T(e_1) = A\cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$T(e_2) = A\cdot e_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$T(e_n) = A\cdot e_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix} = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Prema tome

$$[T]_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} = A$$

q.e.d.

(#) Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Pokazati da za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Rj. Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Za proizvoljan $u \in \mathcal{U}$ $\exists!\, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ t.d. $u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_n u_n$ i za $\forall u_j \in \mathcal{B}$ $\exists!\, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ t.d. $T(u_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i$. Tada

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}.$$

Sad imamo

$$T(u) = T(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_n u_n) = \xi_1 T(u_1) + \xi_2 T(u_2) + \dots + \xi_n T(u_n) =$$

$$= \xi_1 \sum_{i=1}^m \alpha_{i1} v_i + \xi_2 \sum_{i=1}^m \alpha_{i2} v_i + \dots + \xi_n \sum_{i=1}^m \alpha_{in} v_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\xi_j v_i$$

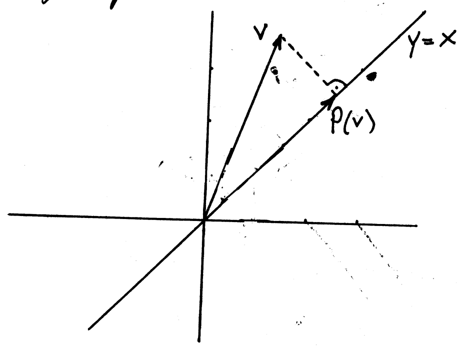
$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\right) v_i$$

Drugim riječima, koordinate od $T(u)$ u odnosu na $\mathcal{B}'$ su $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j$ za $i = 1, 2, \dots, m$ pa prema tome

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}\xi_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{2j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$$

q.e.d.

(#) Neka je P projekcija koja preslikava svaku tačku $v\in\mathbb{R}^2$ na njezinu ortogonalnu projekciju na pravu $y=x$ kao što je prikazano na slici

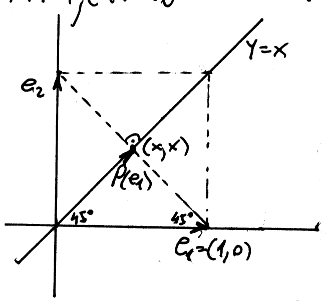


a) Odrediti koordinate matrice P u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti ortogonalnu projekciju od $v=\binom{\alpha}{\beta}$ na pravu $y=x$.

Rj. P je u stvari linearni operator na $\mathbb{R}^2$. Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\varphi=\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}=\{e_1,e_2\}$.

Primjetimo da $P(e_1)=\binom{x}{x}=P(e_2)$ (vidi sliku) te da



vrhovi vektora e_1, $P(e_1)$ i 0 formiraju jkk pravougli trougao. Ako sa $\|P(e_1)\|$ i $\|e_1\|$ označimo, redom, dužinu vektora $P(e_1)$ i e_1 na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$\|e_1\|^2=1=\|P(e_1)\|^2+\|P(e_1)\|^2=2\|P(e_1)\|^2=4x^2.$$ Isto tako
$$\|e_2\|^2=1=\|P(e_2)\|^2+\|P(e_2)\|^2=2\|P(e_2)\|^2=2\left(\sqrt{x^2+x^2}\right)^2=4x^2$$

Prema tome $x^2=\frac{\|e_1\|^2}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ pa

$$P(e_1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2$$
$$P(e_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2$$

Znamo da $[P]_\varphi=\begin{pmatrix} | & | \\ [P(e_1)]_\varphi & [P(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$

pa je $[P]_\varphi=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

b) Iz teorije Linearne algebre znamo:

Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za vektorske prostore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada za $\forall u\in\mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$$

U našem slučaju

$$\left[P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi=[P]_\varphi\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha+\beta}{2}\end{pmatrix}$$

Tj. ortogonalna projekcija od $v=\binom{\alpha}{\beta}$ je $\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha+\beta}{2}\end{pmatrix}$

Ako je T linearni operator na prostoru V sa bazom $\mathcal{B}$, objasniti zašto je $[T^k]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^k$ za sve nenegativne cijele k.

Rj. Iz teorije Linearne algebre znamo da

Ako su $T, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada

$$[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[T+L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad i$$

$$[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Prema tome

$$[T^k]_{\mathcal{B}} = [\underbrace{TT\ldots T}_{k \text{ puta}}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} \ldots [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^k$$

q.e.d.

Pokazati da se djelovanje operatora $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}$ na prostor $\mathcal{P}_3$ svih polinoma stepena 3 ili manje, može prikazati kao matrično množenje.

Rj. $\mathcal{P}_3 = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_0 \in \mathbb{R}\}$

Za bazu od $\mathcal{P}_3$ možemo uzeti $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [D(1)]_{\mathcal{B}} & [D(x)]_{\mathcal{B}} & [D(x^2)]_{\mathcal{B}} & [D(x^3)] \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$D(1) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(x^2)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ako je $p = p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \Rightarrow D(p) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2$

$$\Rightarrow [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad i \quad [D(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Djelovanje D se može prikazati kao matrično množenje zato što

$$[D(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = [D]_{\mathcal{B}} [p]_{\mathcal{B}}$$

(#) Neka su $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, i neka su $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ redom baze za $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$. Pokazati da

a) $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$

b) $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Rj.:

a) Označimo sa C f-ju $C: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ t.d. $C(x) = L(T(x))$ (primjetimo da je C kompozicija od L i T, $C = LT$).

Pokažimo linearnost

$\forall x, y \in \mathcal{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$C(\alpha x + y) = L(T(\alpha x + y)) = L(\alpha T(x) + T(y)) =$$
$$= \alpha L(T(x)) + L(T(y)) = \alpha C(x) + C(y).$$

Prema tome $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

b)

> Ovdje ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:
> Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za $\forall u \in \mathcal{U}$ $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$.

$LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$, $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}''$ je baza za $\mathcal{W}$.

Za proizvoljan vektor $u \in \mathcal{U}$ imamo

$$[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} [u]_{\mathcal{B}} = [LT(u)]_{\mathcal{B}''} = [L(T(u))]_{\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T(u)]_{\mathcal{B}'} =$$
$$= [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}.$$

Ovo vrijedi za sve $u \in \mathcal{U}$, pa $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ q.e.d.

(#) Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ invertibilna u smislu da $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ za neko $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ pokazati da tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ od $\mathcal{U}$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}.$$

Rj.: Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna baza za $\mathcal{U}$ npr.

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Primjetimo da je $\dim \mathcal{U} = n$, i da je za transformaciju

$$I(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

$$[I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(u_1)]_{\mathcal{B}} & [I(u_2)]_{\mathcal{B}} & \ldots & [I(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [u_1]_{\mathcal{B}} & [u_2]_{\mathcal{B}} & \ldots & [u_n]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = I_n$$

Znamo da: Ako su $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $L \in (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ i ako su $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ redom baze za $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ tada

$$[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

U našem slučaju

$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \quad [T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

#

Neka je $T: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linearna transformacija. Pokazati da vrijedi

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
3. $T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k)$ za $\forall \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ i za $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$.

dokaz:

1. $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0\,T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.
2. $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)\,T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.
3. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po k

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $T(\alpha_1 \mathbf{v}_1) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1)$ (prema drugoj aksiomi)

$k=2$: $T(\underbrace{\alpha_1 \mathbf{v}_1}_{\in \mathcal{V}} + \underbrace{\alpha_2 \mathbf{v}_2}_{\in \mathcal{V}}) \overset{\text{prema prvoj aksiomi}}{=} T(\alpha_1 \mathbf{v}_1) + T(\alpha_2 \mathbf{v}_2) \overset{\text{druga aksioma}}{=} \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2)$

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za određeno $k \geq 1$ i pokažimo da tad vrijedi za $k+1$.

$$T(\underbrace{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k}_{\in \mathcal{V}} + \underbrace{\alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}}_{\in \mathcal{V}}) \overset{\text{prema prvoj aksiomi}}{=} T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k) + T(\alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1})$$

$$\underset{\text{i prema drugoj aksiomi}}{\overset{\text{prema pretpost}}{=}} \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} T(\mathbf{v}_{k+1})$$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj k.

#

Neka su $T: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ i $S: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ dvije linearne transformacije. Pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ako je $T(v_i) = S(v_i)$ za svako i, pokazati da je $S = T$.

dokaz:

Izaberimo proizvoljno $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ i napišimo ga u obliku

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Tada, prema jednom od prethodnih zad. imamo

$$T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) =$$
$$= \alpha_1 S(v_1) + \dots + \alpha_n S(v_n) = S(\mathbf{v})$$

Sad, kako S i T imaju isto djelovanje, možemo zaključiti

$$S = T.$$

q.e.d.

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \dots + \alpha_n S(v_n) \\ &= S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

(#)

Neka su V i W vektorski prostori i neka je $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza od V. Za proizvoljne vektore $w_1,w_2,\dots,w_n\in W$ (koji ne moraju biti različiti), dokazati da postoji jedinstvena linearna transformacija $T:V\to W$ koja zadovoljava $T(e_i)=w_i$ za svako $i=1,2,\dots,n$.
U stvari djelovanje od T je sljedeće: Za dati vektor $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$ iz V vrijedi

$$T(v)=T(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\dots+\alpha_nw_n.$$

dokaz:

Pokažimo prvo jedinstvenost. Ako takva transformacija T postoji, i S je neka druga takva transformacija, tada:

$$T(e_i)=w_i=S(e_i)$$

vrijedi za svako i, pa je $S=T$ prema prethodnom zadatku. Prema tome, ako postoji, T je jedinstveno i preostaje nam samo još da pokažemo da postoji takva linearna transformacija.

Za proizvoljno $v\in V$ moramo definisati određeno $T(v)\in W$. Kako je $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza od V imamo $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$ gdje su $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ jedinstveno određeni zbog v (ZAŠTO?). Pa možemo definisati $T:V\to W$ sa

$$T(v)=T(\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\dots+\alpha_nw_n$$

za svaki $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n\in V$. Ovo zadovoljava $T(e_i)=w_i$ za $\forall i$.
Ostaje još da pokažemo da je T linearna transformacija.

$\forall v_1,v_2\in V$; $\forall\alpha\in R$

$T(v_1+v_2)=$ | v_1 i v_2 možemo na jedinstven način prikazati pomoću baze od V: $v_1=\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n$, $v_2=\gamma_1e_1+\dots+\gamma_ne_n$ | $=T(\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n+\gamma_1e_1+\dots+\gamma_ne_n)$

$=T((\beta_1+\gamma_1)e_1+\dots+(\beta_n+\gamma_n)e_n)=(\beta_1+\gamma_1)w_1+\dots+(\beta_n+\gamma_n)e_n=\dots$

završiti za vježbu i pokazati da je $T(\alpha v_1)=\alpha T(v_1)$.

(#)

Neka je $T:R^n\to R^m$ data linearna transformacija. Vektore iz R^n ćemo pisati u obliku kolona. Pokazati da

1. Postoji $m\times n$ matrica A takva da $T(x)=Ax$ za $\forall x\in R^n$, drugim riječima $T=T_A$.
2. Kolone matrice A su redom $T(e_1),\dots,T(e_n)$ gdje je $\{e_1,\dots,e_n\}$ standardna baza za R^n. Prema tome A se može napisati u obliku svojih kolona kao

$$A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

dokaz:

Neka je $\{e_1,\dots,e_n\}$ standardna baza za R^n; i izaberimo proizvoljno $x\in R^n$. Tada postoje jedinstveni $\alpha_i\in R$ takvi da

$$x=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$$

Kako je data linearna transformacija T, to su $T(e_1),\dots,T(e_n)$ jedinstveno određeni, pa napišimo da je

$$T(e_1)=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\quad T(e_2)=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\quad\dots,\quad T(e_n)=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Sad matricu A definišimo kao $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $m\times n$ matricu čija je j-ta kolona $T(e_j)$.
Izračunajmo $T(x)$, korištenjem jednog od prethodnih zadataka

$$T(x)=T(\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)=\alpha_1T(e_1)+\dots+\alpha_nT(e_n)=$$

$$=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$$=Ax=T_A(x)$$

Kako ovo vrijedi za $\forall x\in R^n$, slijedi da $T=T_A$.

Napomena: Matricu A zovemo standardna matrica od T.

Zadaci za vježbu

1. Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ odrediti koje od sljedećih f-ja su linearne transformacije.

(a) $T(x) = Ax + b$ za $b \neq 0$;

(b) $T(X) = (X + X^T)/2$.

2. Za standardnu bazu $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ za prostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, odrediti matricu $[T]_{\mathcal{S}}$ za svaki od sljedećih linearnih operatora na $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pa onda provjeriti $[T(U)]_{\mathcal{S}} = [T]_{\mathcal{S}}[U]_{\mathcal{S}}$ za $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) $T(X) = \dfrac{X + X^T}{2}$

(b) $T(X) = AX - XA$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Za $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_3$ (prostoru svih polinoma stepena manje od ili jednako od dva i tri, redom), neka je $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ linearna transformacija definisana sa

$$S(p) = \int_0^t p(x)\,dx.$$

Odrediti $[S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, gdje je $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ i $\mathcal{B}' = \{1, t, t^2, t^3\}$.

4. Neka je Q linearni operator na $\mathbb{R}^2$ koji rotira svaku tačku u smjeru suprotnom kazaljci na satu za ugao θ, i neka je R linearni operator na $\mathbb{R}^2$ koji reflektira svaku tačku preko x-ose.

(a) Odrediti matricu za kompoziciju $[RQ]_{\mathcal{S}}$ u odnosu na standardnu bazu $\mathcal{S}$.

(b) U odnosu na standardnu bazu, odrediti matricu linearnog operatora koji rotira svaku tačku u $\mathbb{R}^2$ u smjeru suprotnom kazaljci na satu, za ugao 2θ.

(ova stranica je ostavljena prazna)

6. Promjena baza i sličnost

(6.01) Promjena koordinata vektora

Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ baze za $\mathcal{V}$, i neka su T i P, redom, pridruženi operator za promjenu baze i matrica za promenu baze, tj. $T(\boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{x}_i$ za svaki i, i

$$P = [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\boldsymbol{x}_1]_{\mathcal{B}'} & [\boldsymbol{x}_2]_{\mathcal{B}'} & ... & [\boldsymbol{x}_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Tada

- $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'} = P[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.
- P je nesingularna matrica.
- Ni jedna druga matrica se ne može koristiti umjesto $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. ◇

(6.02) Promjena matričnih koordinata

Neka je A linearni operator na $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$. Koordinatne matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezane na sljedeći način.

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \qquad \text{gdje je} \qquad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$. Ekvivalentno

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q, \qquad \text{gdje je} \qquad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$. ◇

(6.03) Sličnost

• Za matrice $B_{n\times n}$ i $C_{n\times n}$ kažemo da su *slične matrice* kadgod postoji nesingularna matrica Q takva da $B = Q^{-1}CQ$. Da bi označili da su matrice B i C slične pišemo $B \simeq C$.

• Linearni operator $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisan sa $f(C) = Q^{-1}CQ$ zovemo *transformacija sličnosti*. ◇

(6.04) Očuvanje ranga

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang. ◇

(ova stranica je ostavljena prazna)

\# Date su dvije baze $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Dat je vektor c koji u odnosu na standardnu bazu $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}$ $\left(c=\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}\right)$.

Odrediti koordinate vektora c u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ (drugim riječima pronaći $[c]_{\mathcal{B}}$) pa poslije toga uz pomoć $[c]_{\mathcal{B}}$ odrediti $[c]_{\mathcal{B}'}$ (koordinate vektora c u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$).

Rj: $\varphi=\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\-8\end{pmatrix}=(-2)e_1+8e_2+(-6)e_3=(-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Da bi odredili $[c]_{\mathcal{B}}$ potrebno je pronaći α, β i γ takve da

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha+2\beta-\gamma=-2\\ \alpha+3\beta=8\\ 2\alpha-\beta+\gamma=-6\end{array}$$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\1&3&0&8\\2&-1&1&-6\end{array}\right]\underset{III_v+I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&1&1&10\\0&-5&3&-2\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot 5}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&1&1&10\\0&0&8&48\end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $8\gamma=48$, $\gamma=6$; $\beta+\gamma=10$, $\beta=4$; $\alpha+3\beta=8$, $\alpha=-4$

Koordinate vektora c u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ su $\begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix}$

tj. $[c]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix}$; $-4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}=c$

Da bi odredili $[c]_{\mathcal{B}'}$ iz $[c]_{\mathcal{B}}$, kako je

$$c=-4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

potrebno je svaki od vektora $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ razložiti preko vektora iz baze $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha+2\beta+\gamma=2\\ \alpha+\beta=3\\ 2\alpha-\gamma=-1\end{array}$$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\1&1&0&3\\2&0&-1&-1\end{array}\right]\underset{III_v+I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&-1&-1&1\\0&-4&-3&-5\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot(-4)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&-1&-1&1\\0&0&1&-9\end{array}\right]$$

$\Rightarrow \gamma=-9$; $2\alpha-\gamma=-1$, $2\alpha+9=-1$, $\alpha=-5$; $\alpha+\beta=3$, $\beta=8$; $\left[\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-5\\8\\-9\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$c=-4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=(-4)\left(1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$
$$+4\left(-5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)+6\left(0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$
$$=(-24)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+32\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-42\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow[c]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-24\\32\\-42\end{pmatrix}$$

Provjerimo $\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}=(-24)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+32\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-42\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Da bi smo izbjegli komplikovani račun koji smo dobili u prvom zadatku želimo odrediti matricu P koju ćemo zvati <u>matrica za promjenu baze</u> i koja će imati osobinu

$$\underline{[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}}.$$

Ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije različite baze vektorskog prostora $\mathcal{V}$ matricu za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ računamo po formuli

$$\underline{P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

gdje je $I(x) = x$ za $\forall x \in \mathcal{V}$.

Ovo slijedi na osnovu ranije navedene teoreme:
Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svako $u \in \mathcal{U}$ imamo

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}}.$$

\# Neka su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $\mathcal{V}$ i neka je $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ gdje je $I(x) = x$ $\forall x \in \mathcal{V}$. Pokazati da $[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}$ za $\forall v \in \mathcal{V}$.

Rj. Prisjetimo se sljedeće teoreme iz osnova teorije
<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$.</u>
<u>Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$ $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$.</u>

Kako je $I \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ sad imamo

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [I(v)]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}}$$

q.e.d.

Napomena:
Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ definisan sa $T(y_i) = x_i$ $\forall i$ gdje su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $\mathcal{V}$, možemo razmišljati o $\mathcal{B}$ kao o staroj bazi, a o $\mathcal{B}'$ kao o novoj bazi. Tada <u>operator za promjenu baze</u> T djeluje sa

$$T(\text{nova baza}) = \text{stara baza}$$

dok <u>matrica za promjenu baze</u> P djeluje sa

$$\text{nove koordinate} = P(\text{stare koordinate})$$

Iz ovog razloga, T treba tumačiti kao <u>operator za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$</u>, dok P zovemo <u>matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$</u>.

(#) Za prostor $\mathcal{P}_2$ svih polinoma stepena 2 ili manje odrediti matricu P za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ gdje

$$\mathcal{B}=\{1,t,t^2\} \quad ; \quad \mathcal{B}'=\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$$

pa poslije toga pronaći koordinate polinoma (vektora) $g(t)=3+2t+4t^2$ u odnosu na $\mathcal{B}'$.

Rj.: Matrica P za promjenu baze $\overbrace{}^{\text{sa } \mathcal{B} \text{ u } \mathcal{B}'}$ ima osobinu da

$$\forall v\in V \quad [v]_{\mathcal{B}'}=P[v]_{\mathcal{B}}$$

Tražimo je na sljedeći način

$$P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

gdje su $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ baze za V

Kako je $\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$ baza za prostor $\mathcal{P}_2$ to prema ispisanoj teoriji, matricu P za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ računamo po formuli

$$P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [1]_{\mathcal{B}'} & [t]_{\mathcal{B}'} & [t^2]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

gdje je $\mathcal{B}'=\{1,1+t,1+t+t^2\}$.

Da bi odredili $[1]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je naći α,β i γ t.d.

$$1=\alpha\cdot 1+\beta\cdot(1+t)+\gamma(1+t+t^2)$$

Odmah vidimo da je $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=0$ pa

$$[1]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da bi odredili $[t]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je naći α,β i γ t.d.

$$t=\alpha\cdot 1+\beta(1+t)+\gamma(1+t+t^2).$$

Vidimo da je $\alpha=-1,\ \beta=1,\ \gamma=0$ pa

$$[t]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Da bi odredili $[t^2]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je pronaći α,β i γ t.d.

$$t^2=\alpha\cdot 1+\beta(1+t)+\gamma(1+t+t^2)$$

Rješenje $\alpha=0,\ \beta=-1,\ \gamma=1$

Prema tome
$$P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [1]_{\mathcal{B}'} & [t]_{\mathcal{B}'} & [t^2]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Koordinate vektora $g=g(t)=3+2t+4t^2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su

$$[g]_{\mathcal{B}'}=P[g]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

Da bi $\overbrace{\text{provjerili}}^{\text{nezavisno od računa}}$ da su koordinate tačne, trebamo provjeriti da li je $g(t)=1\cdot(1)-2(1+t)+4(1+t+t^2)$.

(#) Posmatrajmo matricu $M_{n\times n}$ kao linearni operator na $\mathbb{R}^n$ definisan sa $M(v)=Mv$ (množenje matrice sa vektorom). Ako je $\mathcal{S}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$, i ako je $\mathcal{S}'=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ neka druga baza, opisati $[M]_{\mathcal{S}}$ i $[M]_{\mathcal{S}'}$.

Rj. Standardna baza za $\mathbb{R}^n$ je $\mathcal{S}=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$[M]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [M(e_1)]_{\mathcal{S}} & [M(e_2)]_{\mathcal{S}} & \dots & [M(e_n)]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$M(e_1)=Me_1=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11}\\m_{21}\\\vdots\\m_{n1}\end{bmatrix}=M_{*1}$$

$$M(e_j)=Me_j=M_{*j} \qquad \Rightarrow \qquad [M]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ M_{*1} & M_{*2} & \dots & M_{*n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=M.$$

Da bi pronašli $[M]_{\mathcal{S}'}$ iskoristićemo teoremu:

Ako je A linearni operator na $\mathcal{V}$ i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$ tada

$$[A]_{\mathcal{B}}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{gdje} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$[A]_{\mathcal{B}'}=Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q \quad \text{gdje} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}=P^{-1}$$

U našem slučaju:

$$[M]_{\mathcal{S}'}=Q^{-1}[M]_{\mathcal{S}}Q=Q^{-1}MQ \quad \text{gdje je}$$

$$Q=[I]_{\mathcal{S}'\mathcal{S}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [q_1]_{\mathcal{S}} & [q_2]_{\mathcal{S}} & \dots & [q_n]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Zaključak: Matrice M i $Q^{-1}MQ$ predstavljaju iste linearne operatore (naime M), ali u odnosu na dvije različite baze (naime $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$). Tako da, kad razmatramo osobine od M (kao linearnog operatora) dozvoljeno je zamijeniti M sa $Q^{-1}MQ$. Kadgod struktura od M zamuti osobine operatora, tražimo bazu za $\mathcal{S}'=\{Q_{*1}, Q_{*2}, \dots, Q_{*n}\}$ (ili, ekvivalentno, nesingularnu matricu Q) takvu da $Q^{-1}MQ$ ima jednostavniju strukturu. Ovo je važna tema kroz linearnu algebru i teoriju matrica.

Posmatrajmo linearni operator $A(x,y)=(y,-2x+3y)$ definisan na $\mathbb{R}^2$ zajedno sa dvije baze

$$\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \varphi'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Prvo izračunati matricu koordinata $[A]_\varphi$ kao i matricu Q za promjenu baze sa φ' u φ, pa onda iskoristiti ove dvije matrice da bi odredili $[A]_{\varphi'}$.

Rj.

> Neka je A linearni operator na V, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V. Matrice koordinata $[A]_\mathcal{B}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezani na sljedeći način
>
> $$\underline{[A]_\mathcal{B}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \quad gdje\ je \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$
>
> matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$.

$$[A]_\varphi=\begin{pmatrix} | & | \\ [A(1,0)]_\varphi & [A(0,1)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$A(1,0)=(0,-2)=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [A(1,0)]_\varphi=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$A(0,1)=(1,3)=1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [A(0,1)]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \ldots(*)$$

$$Q=[I]_{\varphi'\varphi}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\varphi & \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$$

Tražimo α i β t.d.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=1 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ponovo tražimo α i β t.d.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=2 \qquad \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Prema tome $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

Prema teoriji linearne algebre

$$\underline{[A]_{\varphi'}=Q^{-1}[A]_\varphi Q \quad gdje\ je \quad Q=[I]_{\varphi'\varphi}}$$

$$[A]_{\varphi'}=Q^{-1}[A]_\varphi Q=Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \det Q=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$Q_{11}=2 \quad Q_{21}=-1 \qquad Q_{kof}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_{12}=-1 \quad Q_{22}=1 \qquad Q_{adj}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}Q_{adj}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

II način – pomoću Gauss-Jordanovih eliminacija

$$[A]_{\varphi'}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Napomena: Za dati linearni operator A, problem pronalaženja baze takve da matrica koordinata linearnog operatora bude što je moguće jednostavnija (npr. dijagonalna) je fundamentalna tema iz teorije matrica.

(#) Neka je $A(x,y,z)=(x+2y-z,\ -y,\ x+7z)^T$ linearni operator na $\mathbb{R}^3$.

(a) Odrediti $[A]_\varphi$ gdje je φ standardna baza.

(b) Odrediti $[A]_{\varphi'}$ kao i nesingularnu matricu Q takvu da

$$[A]_{\varphi'} = Q^{-1}[A]_\varphi Q \quad \text{za} \quad \varphi' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj:

a) Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\varphi = \left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$.

$$[A]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [A(e_1)]_\varphi & [A(e_2)]_\varphi & [A(e_3)]_\varphi \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

$A(e_1) = A(1,0,0) = (1,0,1)^T = e_1 + e_3 \Rightarrow [A(e_1)]_\varphi = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$A(e_2) = A(0,1,0) = (2,-1,0)^T = 2e_1 - e_2 \Rightarrow [A(e_2)]_\varphi = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$A(e_3) = A(0,0,1) = (-1,0,7)^T = -e_1 + 7e_3 \Rightarrow [A(e_3)]_\varphi = \begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}$

$$[A]_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Znamo da: Ako je A linearni operator na V, i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V tada

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}} Q \quad \text{gdje} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

$$[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[I\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[I\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Odavde vidimo da bi odredili $[A]_{\varphi'}$ možda je lakše odrediti Q^{-1} i onda izmnožiti $Q^{-1}[A]_\varphi Q$.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(najlakši način da odredimo Q^{-1} je pomoću Gauss-Jordanovih eliminacija)

$$[A]_{\varphi'} = Q^{-1}[A]_\varphi Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(#) Pokazati da dvije slične matrice moraju biti koordinatne matrice za isti linearni operator.

R:

Neka su C i B dvije slične matrice tj.

$C \simeq B \Rightarrow \exists Q$ t.d. $C = Q^{-1} B Q$.

Posmatrajmo linearni operator A definisan sa

$$A(v) = Bv \quad \text{za } \forall v$$

Ovdje ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

Ako je A linearni operator na V i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V tada

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [A]_{\mathcal{B}'} P \quad \text{gdje} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1} [A]_{\mathcal{B}} Q \quad \text{gdje} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Neka je $\varphi = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Tada

$$[A]_{\varphi} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [A(e_1)]_{\varphi} & [A(e_2)]_{\varphi} & \cdots & [A(e_n)]_{\varphi} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = B$$

Neka je $\mathcal{B}' = \{Q_{*1}, Q_{*2}, \dots, Q_{*n}\}$ baza čiji su elementi kolone matrice Q. Primjetimo da je

$$[I]_{\mathcal{B}'\varphi} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Q_{*1}]_{\varphi} & [Q_{*2}]_{\varphi} & \cdots & [Q_{*n}]_{\varphi} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = Q \quad \dots (*)$$

Dalje primjetimo da prema navedenoj teoremi

$$[A]_{\mathcal{B}'} = [I]^{-1}_{\mathcal{B}'\varphi} [A]_{\varphi} [I]_{\mathcal{B}'\varphi} \overset{(*)}{=}$$

$$= Q^{-1} B Q = C,$$

tj. $C = [A]_{\mathcal{B}'}$.

Kako je još $B = [A]_{\varphi}$ to su obe matrice B i C koordinatne matrice koje predstavljaju linearni operator A. Drugim riječima, slične matrice predstavljaju isti linearni operator.

Linearni operator $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisan sa $f(C) = Q^{-1}CQ$ zovemo <u>transformacija sličnosti</u>.

Transformacija sličnosti koja je invarijantna zovemo <u>invarijanta sličnost</u>. (transformacija daje isti rezultat za sve slične matrice)

\# Trag kvadratne matrice $C_{n\times n}$ je definisan kao suma dijagonalnih elemenata

$$trag(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}.$$

Pokazati da je trag invarijanta sličnost i objasniti zašto ima smisla govoriti o <u>tragu linearnog operatora</u> bez obzira o kojoj je bazi riječ. Poslije ovoga odrediti trag linearnog operatora na $\mathbb{R}^2$ koji je definisan sa

$$A(x,y) = (y, -2x+3y).$$

Rj. Za proizvoljne dvije matrice B i C za koje postoji proizvod BC i CB provjerimo da li

$$trag(BC) = trag(CB)?$$

$$trag(BC) = trag\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm}\end{bmatrix}\right) =$$

$$= (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + \ldots + b_{1n}c_{n1}) + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} + \ldots + b_{2n}c_{2n}) +$$

$$+ \ldots + (b_{m1}c_{m1} + b_{m2}c_{n2} + \ldots + b_{mn}c_{nm}) =$$

$$= (c_{11}b_{11} + c_{21}b_{21} + \ldots + c_{n1}b_{n1}) + \ldots + (c_{n1}b_{m1} + c_{n2}b_{n2} + \ldots + c_{nm}b_{mn})$$

$$\overset{\text{pregrupišimo elemente}}{=} (c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + \ldots + c_{1m}b_{m1}) + \ldots + (c_{n1}b_{1n} + c_{n2}b_{2n} + \ldots + c_{nm}b_{mn})$$

$$= trag\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}\right) = trag(CB)$$

Sad imamo

$$trag(Q^{-1}\underbrace{CQ}_{\text{matrica}}) = trag(CQQ^{-1}) = trag(C)$$

Prema tome sve slične matrice imaju isti trag. Drugim riječima trag je invarijanta sličnost.

Već smo pokazali da slične matrice predstavljaju koordinate istog linearnog operator, razlika je samo u izboru baze. Prema tome $trag([A]_{\mathcal{B}})$, za linearni operator A, je uvijek isti broj, bez obzira na izbor baze $\mathcal{B}$.

Linearni operator $A(x,y) = (y, -2x+3y)$ smo već imali u jednom primjeru, gdje smo za $\varphi = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ i $\varphi' = \left\{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}\right\}$ odredili

$$[A]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad [A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je $trag([A]_{\varphi}) = trag([A]_{\varphi'}) = 3$. Kako je $trag([A]_{\mathcal{B}}) = 3$ za sve $\mathcal{B}$, možemo zaključiti

$$trag(A) = 3.$$

Objasniti zašto je rang invarijanta sličnosti.

Rj: Drugim riječima, pokažimo da sve slične matrice imaju isti rang.

Ovdje ćemo iskoristiti teoremu

<u>Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang.</u>

Neka je $A_{n\times n}$ matrica takva da $\text{rang}(A)=r$.
Za proizvoljnu matricu B koja je slična sa matricom A imamo da $\exists Q, Q^{-1}$ t.d. $A=Q^{-1}BQ$

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang $\Rightarrow$ $\text{rang}(B)=r$

Prema tome sve slične matrice imaju isti rang.
Rang je invarijanta sličnosti.

q.e.d.

Objasniti zašto je transformacija sličnosti tranzitivna u smislu da $A \simeq B$ i $B \simeq C$ povlači $A \simeq C$.

Rj:
$A \simeq B \Rightarrow \exists Q, Q^{-1}$ t.d. $A=Q^{-1}BQ$
$B \simeq C \Rightarrow \exists R, R^{-1}$ t.d. $B=R^{-1}CR$

Sad imamo

$$A=Q^{-1}BQ=Q^{-1}(R^{-1}CR)Q=(Q^{-1}R^{-1})\,C\,(RQ)=$$
$$=(RQ)^{-1}\,C\,(RQ) \Rightarrow A \simeq C$$

q.e.d.

Neka su $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{pmatrix}$ i $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

Posmatrajmo matricu A kao linearni operator na $\mathbb{R}^3$ koja je data pomoću matričnog množenja $A(x)=Ax$. Odrediti $[A]_\mathcal{B}$.

Rj. $$[A]_\mathcal{B}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\mathcal{B} & \left[A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]_\mathcal{B} & \left[A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_\mathcal{B} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Lakši način da odredimo $[A]_\mathcal{B}$ je da iskoristimo sljedeću teoremu:

Ako je A linearni operator na V, i $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dvije baze za V tada

$$[A]_\mathcal{B}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{gdje} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$[A]_{\mathcal{B}'}=Q^{-1}[A]_\mathcal{B}Q \quad \text{gdje} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Pa neka je $\mathcal{S}$ standardna baza za $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$[A]_\mathcal{S}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S} & \left[A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S} & \left[A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[A]_\mathcal{B}=P^{-1}[A]_\mathcal{S}P,\quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\ \dots \Rightarrow [A]_\mathcal{S}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{pmatrix}$$

$$P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}=\left[\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S}\ \left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S}\ \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_\mathcal{S}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}.$$

Kako je $[A]_\mathcal{B}=P^{-1}[A]_\mathcal{S}P$ gdje je $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$,

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

← OVU MATRICU ODREDITI SAMI UZ POMOĆ GAUSS-JORDANOVIH ELIMINACIJA

$$[A]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&3&-4\\5&-1&3\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-3&-7\\7&9&12\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

traženo rješenje

\# Pokazati da su $C=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-2&-3\\6&10\end{pmatrix}$ slične matrice i odrediti nesingularnu matricu Q takvu da $C=Q^{-1}BQ$.

Rj: Za matrice $B_{n\times n}$ i $C_{n\times n}$ kažemo da su slične matrice kadgod postoji nesingularna matrica Q takva da $B=Q^{-1}CQ$. Pišemo $B\simeq C$ da bi označili da su B i C slične.

Iskoristit ćemo sljedeću teoremu:

Ako je A linearni operator na $\mathcal{V}$ i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$ tada

$$[A]_{\mathcal{B}}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{gdje} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$[A]_{\mathcal{B}'}=Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q \quad \text{gdje} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Posmatrajmo linearni operator T definisan sa $T(x)=Bx$. Tada $[T]_{\varphi}=\begin{pmatrix}[T(e_1)]_{\varphi} & [T(e_2)]_{\varphi}\end{pmatrix}$ gdje je φ standardna baza u $\mathbb{R}^2$, $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{e_1,e_2\}$

$$\Rightarrow [T]_{\varphi}=B$$

Neka je φ' neka druga baza za $\mathcal{V}$. Prema navedenoj teoremi

$$[T]_{\varphi'}=P^{-1}[T]_{\varphi}P \quad \text{gdje} \quad P=[I]_{\varphi'\varphi}.$$

Trebamo naći bazu φ' takvu da

$$[T]_{\varphi'}=C=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\end{pmatrix}$$

Pa neka je $\varphi'=\{u,v\}=\left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right\}$

$$[T]_{\varphi'}=\begin{pmatrix}\left[T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}\end{pmatrix}$$

$$T(u)=Bu=\begin{pmatrix}-2&-3\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

$$T(v)=Bv=\begin{pmatrix}-2&-3\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=6u+4v=6\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2u_1-3u_2&=4u_1+3v_1\\6u_1+10u_2&=4u_2+3v_2\\\hline -6u_1-3u_2&=3v_1\\6u_1+6u_2&=3v_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2v_1-3v_2&=6u_1+4v_1\\6v_1+10v_2&=6u_2+4v_2\\\hline -6v_1-3v_2&=6u_1 \quad /:(-3)\\6v_1+6v_2&=6u_2 \quad /:(6)\\2v_1+v_2&=-2u_1\\v_1+v_2&=u_2\end{aligned}$$

...

ZAVRŠIT ZA VJEŽBU

$u_1=2$, $u_2=-1$; $v_1=-3$, $v_2=2$), što zadovoljava date jednakosti.

Prema tome $C=Q^{-1}BQ$ gdje je $Q=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

$(Q=[I]_{\varphi'\varphi})$.

$$\boxed{\underbrace{[T]_{\varphi'}}_{=C}=[I]_{\varphi'\varphi}^{-1}\underbrace{[T]_{\varphi}}_{=B}[I]_{\varphi'\varphi}}$$

(#) Neka je λ skalar takav da je $(C-\lambda I)_{n\times n}$ singularna matrica.

(a) Ako je $B \simeq C$, dokazati da $(B-\lambda I)$ je također singularna.

(b) Dokazati da $(B-\lambda_i I)$ je singularna kadgod je $B_{n\times n}$ slična sa $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Rj. Kada je neka matrica singularna?

Matrica $A_{n\times n}$ je nesingularna ako je invertibilna. Ako matrica A nema inverznu matricu ona je singularna matrica. Drugim riječima ako je $rang(A_{n\times n}) < n$, matrica A je nesingularna.

U ovom zadatku ćemo iskoristiti teoremu koja kaže:

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang.

a) $B \simeq C \Rightarrow \exists Q$ i Q^{-1} t.d. $B = Q^{-1} C Q$

Kako je $(C-\lambda I)_{n\times n}$ nesingularna matrica to je $rang(C-\lambda I) < n$

$$B - \lambda I = Q^{-1} C Q - \lambda Q^{-1} Q = Q^{-1}(C - \lambda I) Q$$

Kako množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang to je $rang(B-\lambda I) < n$ tj.

$B-\lambda I$ je također singularna matrica

q.e.d.

b) Neka je

$B \simeq D$ tj. $\exists Q, Q^{-1}$ t.d. $B = Q^{-1} D Q$

gdje je $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Sad imamo

$$B - \lambda_i I = Q^{-1} D Q - \lambda_i Q^{-1} Q = Q^{-1}(D - \lambda_i I) Q$$

$$= Q^{-1}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) Q$$

gdje je neki od $\lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$.

Odavde vidimo da je $rang(D-\lambda_i I) < n$.

Kako množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang to je $rang(B-\lambda_i I) < n$.

Drugim riječima

$B-\lambda_i I$ je singularna matrica.

q.e.d.

Neka je V vektorski prostor u kojem su date dvije različite baze $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$. Neka su T i I linearni operatori definisani sa

$$T(y_i)=x_i \quad \text{za } i=1,2,\dots,n$$
$$I(x)=x \quad \text{za } \forall x\in V.$$

Pokazati da je $P:=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$.

(T zovemo operator za promjenu baze, a matrica $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ matrica za promjenu baze).

Rj. Iz teorije znamo $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(x_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

$\forall x_i\in\mathcal{B}\ \exists!\ \alpha_{ji}\quad x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}y_j$ pa je

$$T(x_i)=T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}T(y_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}x_j$$

što znači da $[x_i]_{\mathcal{B}'}=[T(x_i)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{ji}\\ \alpha_{ji}\\ \vdots\\ \alpha_{ji}\end{pmatrix}$.

Pa je $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(y_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(y_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(y_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

tj. $[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$. Kako je $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(x_1)]_{\mathcal{B}'} & [I(x_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [I(x_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ to je $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$

q.e.d.

Neka su $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ baze za V i neka je $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ gdje je $I(x)=x\ \forall x\in V$. Pokazati da je P nesingularna matrica.

Rj. Prisjetimo se sljedeće teoreme:

Ako je $T\in\mathcal{L}(U,U)$ invertibilna u smislu da $TT^{-1}=T^{-1}T=I$ za neko $T^{-1}\in\mathcal{L}(U,U)$ tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ od U

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Posmatrajmo linearni operator T definisan sa $T(y_i)=x_i$ i pokažimo da $[T]_{\mathcal{B}}=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=P$.

Znamo da za $\forall x_i\in\mathcal{B}\ \exists!\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ t.d. $x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j$

$\Rightarrow T(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T(y_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \Rightarrow [x_i]_{\mathcal{B}'}=[T(x_i)]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(x_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(x_1)]_{\mathcal{B}'} & [I(x_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [I(x_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=P$

Kako je T invertibilna (u stvari $T^{-1}(x_i)=y_i$) i zbog navedene teoreme $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}^{-1}=P^{-1}$

$\Rightarrow \exists P^{-1} \Rightarrow P$ je nesingularna matrica. q.e.d.

(#) Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V. Pokazati da je matrica P sa osobinom

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{za } \forall v \in V$$

jedinstvena.

Rj.: Ako bi postojala još jedna matrica W sa osobinom

$$[v]_{\mathcal{B}'} = W[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{za } \forall v \in V$$

tada bi imali da je

$$(P - W)[v]_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{za } \forall v \in V$$

Ako za v uzmemo vektore iz baze $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kako je $[x_i]_{\mathcal{B}} = e_i$ imamo

$$(P - W)e_i = 0 \quad \text{za } \forall i \quad \Rightarrow \quad P - W = 0$$

$$P = W$$

Matrica P je jedinstvena.

q.e.d.

Zadaci za vježbu

(1.) Neka je T linearni operator $T(x,y) = (-7x - 15y, 6x + 12y)$. Odrediti bazu $\mathcal{B}$ takvu da $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, i odrediti matricu Q takvu da $[T]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{S}} Q$, gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza.

(2.) Posmatrajući operator rotacije $P(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ pokazati da su matrice

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

slične nad poljem kompleksnih brojeva.
(U slučaju da ste zaboravili (ili niste znali), $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

(3.) Ako je $A \simeq B$ pokazati da $A^k \simeq B^k$ za sve nenegativne cijele k.

(4.) Neka su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za n-dimenzionalni podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^m$ i neka su $X_{m \times n}$ i $Y_{m \times n}$ matrice čije su kolone vektori redom iz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.

(a) Objasniti zašto je $Y^T Y$ nesingularna i dokazati da matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ je

$$P = (Y^T Y)^{-1} Y^T X.$$

(b) Opisati P kada je $m = n$.

Rješenja:

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $[T]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} -7 & -15 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $D = Q^{-1} R Q$, $Q = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

7. Invarijantni podprostori

(7.01) Invarijantni podprostori

• Neka je T linearni operator na $\mathcal{V}$. Za podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kažemo da je *invarijantan podprostor* pod T (u odnosu na operator T) kadgod je $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

• U ovakvim situacijama, T možemo posmatrati kao linearni operator na $\mathcal{X}$ zanemarujući sve ostalo u $\mathcal{V}$ i time ograničiti (restriktovati) T da djeluje samo na vektore iz $\mathcal{X}$. Od sad pa nadalje, ovakav *restriktovan (sužen) operator* ćemo označavati sa $T_{/\mathcal{X}}$. ◇

(7.02) Invarijantni podprostori i predstavljanje pomoću matrice

Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ..., $\mathcal{Z}$ podprostori od $\mathcal{V}$ redom sa dimenzijama r_1, r_2, ..., r_k i bazama $\mathcal{B}_\mathcal{X}$, $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$,...,$\mathcal{B}_\mathcal{Z}$. Dalje, pretpostavimo da je $\sum_i r_i = n$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y} ... \cup \mathcal{B}_\mathcal{Z}$ je baza za $\mathcal{V}$.

• Podprostor $\mathcal{X}$ je invarijantan podprostor u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}, \quad \text{gdje je } A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}.$$

• Svi podprostori $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$,..., $\mathcal{Z}$, su invarijantni u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & ... & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}, \quad B = \left[T_{/\mathcal{Y}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Y}}, \quad ..., \quad C = \left[T_{/\mathcal{Z}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Z}}.$$

◇

(7.03) Trougaoni i dijagonalni blok oblici

Kada je T $n \times n$ matrica, sljedeće dvije tvrdnje su tačne.

• Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times q} \\ \mathbf{0} & C_{q\times q} \end{pmatrix}$$

ako i samo ako prvih r kolona u Q generiše invarijantni podprostor u odnosu na T.

• Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & ... & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

ako i samo ako $Q = (Q_1|Q_2|...|Q_k)$ gdje je Q_i oblika $n \times r_i$, i ako kolone od svake matrice Q_i generišu invarijantan podprostor u odnosu na T. ◇

(ova stranica je ostavljena prazna)

Neka je T proizvoljan linearni operator na vektorskom prostoru $\mathcal{V}$.

(a) Da li je trivijalni podprostor $\{\mathbf{0}\}$ invarijantan pod T? (u odnosu na)

(b) Da li je čitav prostor $\mathcal{V}$ invarijantan pod T? (u odnosu na)

Rj.

$\boxed{\text{Neka je } T \text{ linearni operator na } \mathcal{V}. \text{ Za podprostor } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V} \text{ kažemo da je invarijantan podprostor pod (u odnosu na) } T \text{ kadgod } T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \text{ (gdje je } T(\mathcal{X}) = \{T(x) \mid x \in \mathcal{X}\}).}$

a) Trebamo provjeriti da li je $T(\{\mathbf{0}\}) \subseteq \{\mathbf{0}\}$?

Kako je $\forall x \in \{\mathbf{0}\}$ $T(x) \in \{\mathbf{0}\}$ to je $\{\mathbf{0}\}$ invarijantan pod T.

$$T(\mathbf{0}) = T(x-x) = T(x) - T(x) = \mathbf{0}$$

b) $T: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ što znači $\forall v \in \mathcal{V}$ $T(v) \in \mathcal{V}$

Drugim riječima $T(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ jest invarijantan pod T.

Opisati sve podprostore koji su invarijantni pod (u odnosu na) identičnim operatorom I na prostoru $\mathcal{V}$.

Rj. $I: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$I(v) = v$ za $\forall v \in \mathcal{V}$

$\boxed{\text{Za podprostor } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V} \text{ kažemo da je invarijantan podprostor pod (u odnosu na) operatorom } T \text{ kadgod } T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}.}$

Za proizvoljan podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ imamo da je $I(x) = x \in \mathcal{X}$ za $\forall x \in \mathcal{X}$ tj. $I(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$

Prema tome za svaki podprostor $\mathcal{X}$, $I(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

Svaki podprostor od $\mathcal{V}$ je invarijandan pod I.

(#) Za $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $x_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

pokazati da podprostor $\mathcal{X}$ generisan sa $\mathcal{B}=\{x_1,x_2\}$ je invarijantan podprostor u odnosu na pod A. Poslije toga opisati restrikciju $A_{/\mathcal{X}}$ i odrediti koordinantnu matricu od $A_{/\mathcal{X}}$ u odnosu na $\mathcal{B}$.

Rj.

$$\mathcal{X}=\operatorname{span}(\mathcal{B})=\operatorname{span}(\{x_1,x_2\})=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2 \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

Za proizvoljno $v\in\mathcal{X}$ $\exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d. $v=\alpha x_1+\beta x_2$

$$A(v)=Av=A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2 \quad \dots(*)$$

Prema tome da bi odredili da li je $A(v)\in\mathcal{X}$ trebamo pronaći $A(x_1)$ i $A(x_2)$ tačnije trebamo vidjeti da li je $A(x_1)\in\mathcal{X}$ i $A(x_2)\in\mathcal{X}$.

$$A(x_1)=Ax_1=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=2x_1\in\mathcal{X}$$

$$A(x_2)=Ax_2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\overset{(\square)}{=}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\underbrace{x_1+2x_2}_{\in\mathcal{X}}$$

Da li možemo vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju od x_1 i x_2?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\mu-\eta=0 \\ -\mu+2\eta=3 \\ -\eta=-2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \eta=2 \Rightarrow \\ \mu=1 \end{matrix}$$

$\dots(\square)$

Prema $(*)$ za $\forall v\in\mathcal{X}$ $(v=\alpha x_1+\beta x_2)$

$$A(v)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2=2\alpha x_1+\beta x_1+2\beta x_2=(2\alpha+\beta)x_1+2\beta x_2\in\mathcal{X}$$

tj. $\forall v\in\mathcal{X}$ $A(v)\in\mathcal{X}$. Drugim riječima

$$A(\mathcal{X})\subseteq\mathcal{X}$$

$\mathcal{X}$ je invarijantan podprostor pod A.

Sad odredimo $A_{/\mathcal{X}}$ i $[A_{/\mathcal{X}}]$.

Već smo vidjeli da za $\forall v\in\mathcal{X}$ $A(v)=(2\alpha+\beta)x_1+2\beta x_2$ gdje su $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Prema tome

$$A_{/\mathcal{X}}(x)=(2\alpha+\beta)x_1+2\beta x_2 \quad \text{za svako } x=\alpha x_1+\beta x_2\in\mathcal{X}$$

Dalje

$$[A_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | \\ [A_{/\mathcal{X}}(x_1)]_{\mathcal{B}} & [A_{/\mathcal{X}}(x_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$A_{/\mathcal{X}}(x_1)=2x_1 \quad ; \quad A_{/\mathcal{X}}(x_2)=x_1+2x_2 \quad \Rightarrow$$

$$[A_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{V}$ i neka je $\mathcal{X}$ podprostor od $\mathcal{V}$ čija je dimenzija r i baza $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$. Pokazati da ako je podprostor $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor pod (u odnosu na) T tada $[T]_{\mathcal{B}}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{i u tom slučaju} \quad A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}},$$

gdje je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{V}$.

Rj. Pa neka je $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor pod T i neka je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ baza za $\mathcal{X}$.
Kako je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{V}$, a $\mathcal{X}$ podprostor od $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ je samo dio baze $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_q\}$$

čitavog prostora $\mathcal{V}$ $(r+q=n)$.
Da bi izračunali $[T]_{\mathcal{B}}$ prisjetimo se definicije koordinatne matrice da

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(x_r)]_{\mathcal{B}} & [T(y_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(y_q)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | & | & & | \end{pmatrix} \quad \dots (1)$$

Kako je $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor pod T to je svaki $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_r)$ sadržan u $\mathcal{X}$, pa nam samo prvih r vektora iz $\mathcal{B}$ treba da opišemo svaki $T(x_j)$ za $j=1,2,\dots,r$.

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} x_i \quad i \quad [T(x_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \dots (2)$$

Prostor $\mathcal{Y} = \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ ne mora biti invarijantan u odnosu na T, pa će svi vektori iz baze $\mathcal{B}$ biti potrebni da predstave $T(y_j)$. Prema tome, za $j=1,2,\dots,q$

$$T(y_j) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{q} \gamma_{ij} y_j \quad i \quad [T(y_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{rj} \\ \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{qj} \end{pmatrix} \quad \dots (3)$$

Sad ako iskoristimo (1), (2) i (3) imamo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \beta_{r1} & \dots & \beta_{rq} \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{q1} & \dots & \gamma_{qq} \end{pmatrix}$$

Jednakost $T(x_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} x_i$ u (2) znači da

$$\left[T_{/\mathcal{X}}(x_j)\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{rj} \end{pmatrix} \quad \text{pa} \quad \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{pmatrix}$$

pa se matrica $[T]_{\mathcal{B}}$ može napisati kao

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} & B_{r\times q} \\ 0 & C_{q\times q} \end{pmatrix}.$$

Drugim riječima matrica za T se može napraviti u blok-trougaon. obliku kadgod je ima podprost. prisutan.

Za $T=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&-5&-16&-22\\0&3&10&14\\4&8&12&14\end{pmatrix}$, $g_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ i $g_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$

provjeriti da li je $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ invarijantan podprostor pod T, pa onda pronaći nesingularnu matricu Q takvu da $Q^{-1}TQ$ ima blok-trougaoni oblik

$$Q^{-1}TQ=\left(\begin{array}{cc|cc}*&*&*&*\\ *&*&*&*\\ \hline 0&0&*&*\\0&0&*&*\end{array}\right).$$

Rj.: Da bi vektorski prostor $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ bio invarijantan pod T potrebno je i dovoljno da

$$T(x)\in\mathcal{X}\quad \text{za } \forall x\in\mathcal{X}$$

Kako je $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ to svaki $x\in\mathcal{X}$ ima oblik $x=\alpha g_1+\beta g_2$. Pa da bi odredili $T(x)$ izračunajmo prvo $T(g_1)$ i $T(g_2)$

$$T(g_1)=Tg_1=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&-5&-16&-22\\0&3&10&14\\4&8&12&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\\0\end{pmatrix}$$

Da li postoje α i β t.d. $\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\0\end{pmatrix}=\alpha g_1+\beta g_2$

$$\begin{aligned}2\alpha-\beta&=-1\\-\alpha+2\beta&=5\\-\beta&=-3\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \beta=3\quad \alpha=1\quad\Rightarrow\quad T(g_1)=g_1+3g_2$$

$$T(g_2)=Tg_2=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&-5&-16&-22\\0&3&10&14\\4&8&12&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\\0\end{pmatrix}$$

Da li postoje $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d. $\begin{pmatrix}0\\6\\-4\\0\end{pmatrix}=\alpha g_1+\beta g_2$

$$\begin{aligned}2\alpha-\beta&=0\\-\alpha+2\beta&=6\\-\beta&=-4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \beta=4,\ \alpha=2\quad\Rightarrow\quad T(g_2)=2g_1+4g_2$$

Prema tome za $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$T(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha T(g_1)+\beta T(g_2)=\alpha(g_1+3g_2)+\beta(2g_1+4g_2)$$
$$=(\alpha+2\beta)g_1+(3\alpha+4\beta)g_2\in\mathcal{X}$$

$\mathcal{X}$ jest invarijantan u odnosu na T.

Da bi pronašli željenu matricu Q prvo moramo konstruisati proširenje od $\{g_1,g_2\}$ do baze $\mathcal{B}=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ za $\mathbb{R}^4$. Prisjetimo se kako se to radi.

$$\begin{bmatrix}2&-1&1&0&0&0\\-1&2&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{I_v:2}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1/2&1/2&0&0&0\\-1&2&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{II_v+I_v}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-1/2&1/2&0&0&0\\0&3/2&1/2&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{II_v\cdot\frac{2}{3}}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1/2&1/2&0&0&0\\0&1&1/3&2/3&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{III_v+II_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{III \cdot 3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

prema tome $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Znamo da:

Neka je T $n \times n$ matrica. Q je nesingularna matrica takva da

$$Q^{-1} T Q = \begin{pmatrix} A_{r \times r} & B_{r \times q} \\ 0 & C_{q \times q} \end{pmatrix}$$

akko prvih r kolona u Q generiše invarijantan podprostor u odnosu na T.

Prema tome $Q^{-1}TQ$ mora biti blok-trougaonog oblika.

Ovo nije teško provjeriti

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad Q^{-1}TQ = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 0 & -14 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Primjetimo usput da je

$$[T/\mathcal{X}]_{\{g_1, g_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

\# Neka je data matrica $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix}$ i neka je

$$\mathcal{B} = \left\{ g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ baza

za $\mathbb{R}^4$. Obrazložiti odgovore na pitanja

a) Da li su prostori $\mathcal{X} = span\{g_1, g_2\}$ i $\mathcal{Y} = span\{g_3, g_4\}$ invarijantni u odnosu na T.?

b) Da li postoji invertibilna matrica Q takva da je $Q^{-1}TQ$ blok dijagonalna? Ako postoji odrediti tu matricu.

c) Ako je moguće odrediti $[T/\mathcal{X}]_{\{g_1, g_2\}}$ i $[T/\mathcal{Y}]_{\{g_3, g_4\}}$.

R:

a) $\mathcal{X} = span\{g_1, g_2\} = \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

Prostor $\mathcal{X}$ je invarijantan u odnosu na T akko $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ tj. $\{T(x) \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X}$.

U našem slučaju $T(x) = T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2)$ pa da bi $T(x) \in \mathcal{X}$ za $\forall x \in \mathcal{X}$ potrebno je i dovoljno da $T(g_1)$ i $T(g_2) \in \mathcal{X}$.

$$T(g_1) = Tg_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{za vježbu}}{=\!=} g_1 + 3g_2$$

$$T(g_2) = Tg_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{za vježbu}}{=\!=} 2g_1 + 4g_2$$

Prema tome $\mathcal{X}$ jest invarijantan u odnosu na T.

$Y = span\{g_3, g_4\} = \{B_1 g_3 + B_2 g_4 \mid B_1, B_2 \in R\}$.

Kako je $T(B_1 g_3 + B_2 g_4) = B_1 T(g_3) + B_2 T(g_4)$ da bi odrediti da li je $T(y) \in Y$ za $\forall y \in Y$ potrebno je i dovoljno provjeriti da li je $T(g_3)$ i $T(g_4)$ iz Y.

$$T(g_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} 5 g_3 + 7 g_4$$

$5 - 32 + 22$
$-3 + 20 - 14$
$-8 + 24 - 14$

Provjerimo može li se vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ izraziti kao linearna kombinacija g_3 i g_4?

$$\alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{g_3} + B \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\alpha = -5 \\ \alpha = 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2\alpha - B = 3 \\ -B = -7 \\ B = 7 \end{matrix} \quad \dots (*)$$

$$T(g_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Provjerimo može li se vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ izraziti kao linearna kombinacija g_3 i g_4?

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\alpha = -6 \\ \alpha = 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2\alpha - B = 4 \\ -B = -8 \\ B = 8 \end{matrix} \quad \dots (**)$$

Prema tome Y jest invarijantan u odnosu na T.

b) Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo.

Neka je T $n \times n$ matrica. Tada Q je nesingularna matrica takva da
$$Q^{-1} T Q = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix}$$

akko $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ gdje je Q_i oblika $n \times r_i$ i svaku od kolona Q_i generiše invarijantan podprostor u odnosu na T.

Kako su, u našem slučaju, X i Y invarijantni u odnosu na T i $X = span\{g_1, g_2\}$, $Y = span\{g_3, g_4\}$ to prema navedenoj teoremi matrica Q postoji i ona je oblika
$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovo možemo provjeriti!

Odredimo prvo Q^{-1} pomoću metode Gauss-Jordanovih eliminacija

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III_v + IV_v]{I_v + II_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + (I_v + 2 III_v)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + III_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III_v + II_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{IV_v + III_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Prema tome $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

c) $T_{/\mathcal{X}}$ i $T_{/\mathcal{Y}}$ imaju smisla zato što su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ invarijantni u odnosu na T

$T_{/\mathcal{X}}$ čitamo restriktovan operator T na $\mathcal{X}$

$$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{g_1, g_2\}} = \begin{pmatrix} [T_{/\mathcal{X}}(g_1)]_{\{g_1,g_2\}} & [T_{/\mathcal{X}}(g_2)]_{\{g_1,g_2\}} \end{pmatrix}$$

Kako je

$T(g_1) = g_1 + 3g_2$ i $T(g_2) = 2g_1 + 4g_2$ to je

$$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{g_1, g_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Slično

$$[T_{/\mathcal{Y}}]_{\{g_3, g_4\}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

\# Odrediti sve podprostore od $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rj. Podprostori od $\mathbb{R}^2$ mogu biti dimenzije 0, 1 i 2.

- Trivijalni podprostor $\{\mathbf{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ je jedini nula-dimenzionalni prostor pa je on i jedini nula-invarijantan podprostor od $\mathbb{R}^2$.

Podprostor od $\mathbb{R}^2$ koji je dimenzije 2 mora biti sam $\mathbb{R}^2$ (zašto?). Pa je $\mathbb{R}^2$ jedini dvo-dimenzionalni invarijantan podprostor.

Pravi problem predstavlja pronaći sve jedno-dimenzionalne invarijantne podprostore.

Posmatrajmo jednodimenzionalan podprostor $\mathcal{M}$ koji je generisan sa $x \neq 0$ ($\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x\} = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$) takav da je $A(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Tada

$$Ax \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists \text{ skalar } \lambda \text{ takav da } Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Drugim riječima $\mathcal{M} \subseteq \ker(A - \lambda I)$. Kako je $\dim \mathcal{M} = 1$, mora biti slučaj da $\ker(A - \lambda I) \neq 0$ i λ mora biti skalar takav da je $(A - \lambda I)$ singularna matrica.

Pitanje: Zašto $(A - \lambda I)$ ne smije biti nesingularna matrica?

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix} \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda\\ -\lambda & 1\end{pmatrix} \overset{II_v + I_v\cdot\frac{-\lambda}{2}}{\sim} \begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda \\ 0 & 1+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}\end{pmatrix}$$

A odavde vidimo da će $A-\lambda I$ biti singularna matrica akko $1+\frac{\lambda^2-3\lambda}{2}=0$ tj. akko je λ korijen od

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Prema tome $\lambda=1$ i $\lambda=2$ i direktno računanje povlači dva jedno-dimenzionalna invarijantna podprostora

$$M_1=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

i $M_2=\ker(A-2I)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ i ovo su tražena rješenja

---

Usput, primjetimo da $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$

i $[A]_{\mathcal{B}}=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ gdje $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

U opštem slučaju, skalare λ za koje $(A-\lambda I)$ je singularna zovemo svojstvene vrijednosti od A, i nenula vektore u $\ker(A-\lambda I)$ su poznati kao svojstveni vektori za A. Kao što ovaj primjer pokazuje, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su od velike važnosti u identificiranju invarijantnih podprostora i u svođenju matrica pomoću transformacija sličnosti.

(#) Neka je T linearni operator na $\mathbb{R}^4$ definisan sa

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+2x_3-x_4,\ x_2+x_4,\ 2x_3-x_4,\ x_3+x_4)$$

i neka je $\mathcal{X}=\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$ podprostor koji je generisan uz pomoć prva dva jedinična vektora u $\mathbb{R}^4$.

(a) Objasniti zašto je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T.

(b) Odrediti $[T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}$.

(c) Opisati strukturu od $[T]_{\mathcal{B}}$, gdje je $\mathcal{B}$ baza dobijena iz proširenja od $\{e_1,e_2\}$.

Rj.

a) $\mathcal{X}=\operatorname{span}\{e_1,e_2\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

Izaberimo proizvoljan $x\in\mathcal{X}$. Tada $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d. $x=\alpha e_1+\beta e_2$.

$$T(x)=T(\alpha e_1+\beta e_2)=\alpha T(e_1)+\beta T(e_2)=$$
$$=\alpha T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\alpha e_1+\beta(e_1+e_2)=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2\in\mathcal{X}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=e_1,\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=e_1+e_2 \quad \ldots(*)$$

Kako je $T(x)=T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix}=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2\in\mathcal{X}$ za $\forall x\in\mathcal{X}$ to je podprostor $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na $\mathcal{X}$.

b) $$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}=\begin{pmatrix}[T_{/\mathcal{X}}(e_1)]_{\{e_1,e_2\}} & [T_{/\mathcal{X}}(e_2)]_{\{e_1,e_2\}}\end{pmatrix}$$

Kako je $T(e_1)=e_1$ i $T(e_2)=e_1+e_2$ to je

$$T_{/\mathcal{X}}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix}=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2 \qquad [T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

c) Neka je $\mathcal{B}$ dobijena iz proširenja $\{e_1, e_2\}$ tj. npr. neka je $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(e_1)]_{\mathcal{B}} & [T(e_2)]_{\mathcal{B}} & [T(e_3)]_{\mathcal{B}} & [T(e_4)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$[T(e_1)]_{\mathcal{B}} = e_1$,

$[T(e_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$T(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(e_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(e_4)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Napomena: Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{V}$ i neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots, \mathcal{Z}$ podprostori od $\mathcal{V}$, redom, su dimenzijama $r_1, r_2, \dots, r_k$ i bazama $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}, \dots, \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$. Dalje pretpostavimo da $\sum_i r_i = n$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ je baza za $\mathcal{V}$. Tada su podprostori $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots, \mathcal{Z}$ su invarijantni u odnosu na T akko $[T]_{\mathcal{B}}$ je blok-dijagonalnog oblika

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix}$$

i u tom slučaju $A = [T_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}}$, $B = [T_{/\mathcal{Y}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}}, \dots, C = [T_{/\mathcal{Z}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}}$

\# Neka su T i Q matrice

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -2 \\ -9 & 0 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 3 & -5 & -13 & 7 \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Objasniti zašto su kolone od Q baza za $\mathbb{R}^4$.

(b) Provjeriti da li su $\mathcal{X} = \operatorname{span}\{Q_{*1}, Q_{*2}\}$ i $\mathcal{Y} = \operatorname{span}\{Q_{*3}, Q_{*4}\}$ invarijantni podprostori u odnosu na T.

(c) Opisati strukturu od $Q^{-1}TQ$ bez ikakvog računanja,

(d) Izračunati proizvod $Q^{-1}TQ$ i odrediti

$$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{Q_{*1}, Q_{*2}\}} \quad i \quad [T_{/\mathcal{Y}}]_{\{Q_{*3}, Q_{*4}\}}.$$

Rj.

a) Kolone od Q će biti baza za $\mathbb{R}^4$ akko su linearno nezavisne.

| kolone od A su linearno nezavisne | akko $\ker(A) = \{0\}$ akko $\operatorname{rang}(A) = n$ |

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III_v + I_v \cdot 2 \\ IV_v + I_v \cdot (-3)}]{II_v - I_v} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{IV_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{IV_v + III_v \cdot (-7)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(Q) = 4 \Rightarrow \text{kolone su linearno nezavisne}$$

$\Rightarrow$ kolone od Q su baza za $\mathbb{R}^4$.

b)
$$\mathcal{X} = \operatorname{span}\{Q_{*1}, Q_{*2}\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Da li je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T?

$$T \cdot Q_{*1} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -5 & -2\\ -9 & 0 & -8 & -2\\ 2 & 3 & 11 & 5\\ 3 & -5 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = Q_{*1}$$

$-2-1+10-6$
$-9+16-6$
$2+3-22+15$
$3-5+26-21$

$$T Q_{*2} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -5 & -2\\ -9 & 0 & -8 & -2\\ 2 & 3 & 11 & 5\\ 3 & -5 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\2\end{pmatrix} = Q_{*1} + Q_{*2}$$

Kako je proizvoljan $x \in \mathcal{X}$ oblika $x = \alpha Q_{*1} + \beta Q_{*2}$ i
$T(x) = \alpha T(Q_{*1}) + \beta T(Q_{*2}) = \alpha Q_{*1} + \beta(Q_{*1} + Q_{*2}) = (\alpha+\beta) Q_{*1} + \beta Q_{*2}$
to je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T.

$\mathcal{Y}$ jest invarijantan u odnosu na T zato što

$$T(\gamma_1 Q_{*3} + \gamma_2 Q_{*4}) = \gamma_1 T(Q_{*3}) + \gamma_2 T(Q_{*4}) = \gamma_1 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix}0\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \gamma_4 Q_{*4} \in \operatorname{span}\{Q_{*3}, Q_{*4}\}$$

OVO ZADNJE RASPISAT ZA VJEŽBU

c) Znamo da:
Neka je T $n \times n$ matrica. Tada Q je nesingularna matrica takva da
$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix}A_{r_1 \times r_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & C_{r_k \times r_k}\end{pmatrix}$$
akko $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$
u kojoj Q_i je $n \times r_i$ i kolone od svakog Q_i generišu invarijantan podprostor u odnosu na T.

Prema navedenoj teoremi $Q^{-1}TQ$ bi trebala biti blok dijagonal...

Time smo dobili da je

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (*)$$

Sad imamo

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k+z_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\big((x_k-z_k)+(z_k-y_k)\big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(*)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z) + d(y,z)$$

Vrijedi nejednakost trougla.

Prema tome dati prostor jest metrički prostor.

(#) Dat je skup $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2+x_2^2=1\}$ (jedinični krug u $\mathbb{R}^2$) i f-ja $d: M\times M \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$d(x,y)$ = dužina najmanjeg luka koji spaja dvije tačke x i y na jediničnom krugu

Provjeriti da li je (M,d) metrički prostor.

Rj. <u>(M,d) je metrički prostor akko za bilo koje tri tačke $x, y, z \in M$ vrijede sljedeće četri osobine</u>

1. $d(x,x)=0$
2. $d(x,y)>0$ ako $x\neq y$
3. $d(x,y)=d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

Provjerimo prvu osobinu.

Posmatrajmo tačku $M(x,y)$. Tada $d(M,M) = d(\underbrace{(x,y)}_{x}, \underbrace{(x,y)}_{x}) = 0$

$\Rightarrow$ vrijedi prva osobina

Provjerimo drugu osobinu.

Prvo primjetimo da se dati krug može parametrizirati na sljedeći način

$$x_1 = \cos\varphi$$
$$x_2 = \sin\varphi$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

pa za proizvoljne dvije tačke $M(x,y)$ i $N(x_1,y_1)$ možemo posmatrati neki ugao φ_0 i neki ugao φ_1. Znamo da se dužina luka f-je $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$ računa po formuli $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

pa je dužina luka od φ_0 do φ_1 u stvari $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi$.
Zbog kraćeg zapisa kraći luk ćemo obilježiti sa $|\varphi_1-\varphi_0|$.

$d(x,y) = d(\varphi_0, \varphi_1) = |\varphi_1 - \varphi_0| > 0$ za $\varphi_1 \neq \varphi_0$

vrijedi druga osobina.

Provjerimo treću osobinu.

$$d(x,y) = d(\varphi_0,\varphi_1) = |\varphi_1-\varphi_0| = |\varphi_0-\varphi_1| = d(y,x)$$

vrijedi treća osobina

Provjerimo četvrtu osobinu.

$$d(x,y) = d(\varphi_0,\varphi_1) = |\varphi_1-\varphi_0| = |\varphi_1-\varphi_2+\varphi_2-\varphi_0| \leq$$

$$\leq |\varphi_1-\varphi_2| + |\varphi_2-\varphi_0| = d(x,z) + d(z,y)$$

vrijedi četvrta osobina

(M, d) jest metrički prostor.

Topologija tački u metričkom prostoru

Posmatrajmo metrički prostor (M, d).

Ako je $a \in M$, kugla $B(a;r)$ sa centrom u a i poluprečnika $r>0$ je definisana kao skup svih x iz M takvih da

$$d(x,a) < r.$$

Nekad ćemo ovu kuglu označiti sa $B_M(a;r)$ da istaknemo činjenicu da tačke dolaze iz M. Ako je S metrički podprostor od M, kugla $B_S(a;r)$ je presjek skupa S sa kuglom $B_M(a;r)$

Primjer. U Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^1$ kugla $B(0;1)$ je otvoreni interval $(-1,1)$. U metričkom podprostoru $S=[0,1]$ kugla $B_S(0;1)$ je poluotvoreni interval $[0,1)$.

Napomena: Geometrijski izgled kugle u $\mathbb{R}^n$ ne mora biti "sfernog" oblika ako data metrika nije Euklidova metrika (npr. pokušajte skicirati kuglu $B(a;r)$ za sljedeće dvije metrike u $\mathbb{R}^n$ gdje je $n=2$ i $n=3$

$$d_1(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i-y_i|, \quad d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| \quad)$$

Ako je $S \subseteq M$, tačka a iz S nazivamo unutrašnja tačka od S ako neka kugla $B_M(a;r)$ čitava leži u S.

Unutrašnjost skupa $\mathcal{S}$, int $\mathcal{S}$, je skup svih unutrašnjih tački skupa $\mathcal{S}$. Skup $\mathcal{S}$ se naziva <u>otvoren</u> u $\mathcal{M}$ ako

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

9. Unitarni prostori

(9.01) Opšti unutrašnji proizvod

Unutrašnji proizvod na realnom (ili kompleksnom) vektorskom prostoru $\mathcal{V}$ je funkcija koja preslikava svaki uređen par vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ u realan (ili kompleksan) skalar $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ takav da vrijede sljedeće osobine.

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ je realan, sa osobinama $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, i $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ akko $\boldsymbol{x} = 0$,

$\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ za svaki skalar α,

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$,

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$ (za realan prostor, ovo postaje $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$).

Primjetimo da za svaku fiksiranu vrijednost od $\boldsymbol{x}$, druga i treća osobina kaže da je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ linearna funkcija po $\boldsymbol{y}$.

Bilo koji realan ili kompleksan vektorski prostor koji je opremljen sa unutrašnjim proizvodom se zove *unitarni prostor*. ◇

(9.02) Opšta CBS nejednakost

Ako je $\mathcal{V}$ unutrašnji proizvod, i ako postavimo da je $\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle}$, tada

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{V}.$$

Jednakost važi ako i samo ako $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ za $\alpha = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle / \|\boldsymbol{x}\|^2$. ◇

(9.03) Norme u unitarnom prostoru

Ako je $\mathcal{V}$ unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, tada

$$\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle} \quad \text{definiše normu na } \mathcal{V}.$$

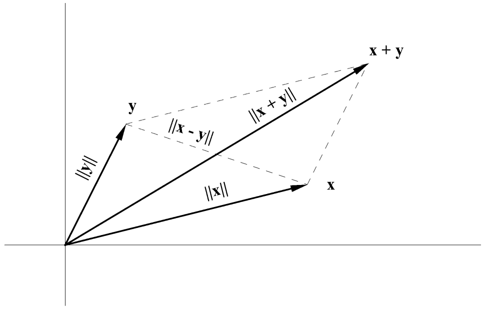
◇

(9.04) Jednakost paralelograma

Za datu normu $\| \star \|$ na vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, postoji unutrašnji proizvod na $\mathcal{V}$ takav da $\langle \star, \star \rangle = \| \star \|^2$ ako i samo ako važi *jednakost paralelograma*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$$

za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. ◇



(ova stranica je ostavljena prazna)

\# Za $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ odrediti koji od sljedećih su unutrašnji proizvodi za $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_3y_3$

(b) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$

Rj. Unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava uređeni par vektora x, y u realni skalar $\langle x,y\rangle$ tako da važe sljedeće četri osobine

(i) $\langle x,x\rangle$ je realan takav da $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$,

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ za sve skalare α

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(iv) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

a) $\langle x,x\rangle = \underbrace{x_1x_1}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x_3x_3}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle = x_1^2 + x_3^2 \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $x_1^2+x_3^2=0$ akko $x_1=x_3=0$ akko $x=\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix}$

Prema tome $\exists x\neq 0$ takav da $\langle x,x\rangle = 0$ (ZAŠTO?)

Dati proizvod nije unutrašnji proizvod.

b) $\langle x,x\rangle = \underbrace{x_1^2}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{x_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x_3^2}_{\in\mathbb{R}} \in\mathbb{R}$, Da li je $\langle x,x\rangle \geq 0$ $\forall x$.

Ako su koordinate x_1 i x_3 vektora $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ takve da $x_1^2+x_3^2 < x_2^2$ tada je $\langle x,x\rangle < 0$.

Dati proizvod nije unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^3$.

\# Za dva data vektora $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ odrediti koja od sljedeća dva proizvoda, su unutrašnji proizvodi ~~za~~ $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3$

(b) $\langle x,y\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$

Rj. Unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava uređeni par vektora x,y u realni skalar $\langle x,y\rangle$ tako da vrijede sljedeće četri osobine

(i) $\langle x,x\rangle \in\mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$,

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(iv) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (za kompleksan vektorski prostor ova osobina glasi $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$).

a) (i) $\langle x,x\rangle = \underbrace{2x_1^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{4x_3^2}_{\in\mathbb{R}} \in\mathbb{R}$ $\quad 2x_1^2+x_2^2+4x_3^2 \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $2x_1^2+x_2^2+4x_3^2=0$ akko $x_1=x_2=x_3=0$ akko $x=0$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = 2x_1\alpha y_1 + x_2\alpha y_2 + 4x_3\alpha y_3 = \alpha(2x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3) = \alpha\langle x,y\rangle$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x,y+z\rangle = 2x_1(y_1+z_1) + x_2(y_2+z_2) + 4x_3(y_3+z_3) =$

$= 2x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3 + 2x_1z_1+x_2z_2+4x_3z_3 =$

$= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3 = 2y_1x_1+y_2x_2+4y_3x_3 = \langle y,x\rangle$

Dati proizvod jest unutrašnji proizvod

b) ZAVRŠITI ZA VJEŽBU (odgovor: nije unutrašnji proizvod).

Za opšti unitarni prostor V, objasniti zašto svaka od sljedećih tvrdnji mora biti tačna.

(a) Ako je $\langle x,y\rangle=0$ za $\forall x\in V$, tada $y=\mathbf{0}$.

(b) $\langle \alpha x,y\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle$ za $\forall x,y\in V$ i za svaki skalar α.

(c) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$ za $\forall x,y,z\in V$.

Rj.

Unutrašnji (skalarni) proizvod na kompleksnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava svaki uređen par vektora x,y u realan ili kompleksni skalar tako da vrijede sljedeće četri osobine:

(i) $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle\geq 0$ i $\langle x,x\rangle=0$ akko $x=\mathbf{0}$,

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$ za svaki skalar α

(iii) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$,

(iv) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

Svaki realni ili kompleksni vektorski prostor koji sadrži unutrašnji proizvod zovemo unitarni prostor.

a) Pokažimo da $\langle x,y\rangle=0,\ \forall x\in V \Rightarrow y=\mathbf{0}$.

$\langle x,y\rangle=0,\ \forall x\in V$

Ako za x uzmemo y imamo $\langle y,y\rangle=0 \overset{(i)}{\Longrightarrow} y=\mathbf{0}$

b) $\langle \alpha x,y\rangle \overset{(iv)}{=} \overline{\langle y,\alpha x\rangle}=\overline{\alpha\langle y,x\rangle}=\overline{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle}\overset{(iv)}{=}\overline{\alpha}\langle x,y\rangle$

c) $\langle x+y,z\rangle \overset{(iv)}{=} \overline{\langle z,x+y\rangle}\overset{(iii)}{=}\overline{\langle z,x\rangle+\langle z,y\rangle}=$

$=\overline{\langle z,x\rangle}+\overline{\langle z,y\rangle}=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

Neka je V unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $\langle x,y\rangle$. Objasniti zašto f-ja definisana sa $\|*\|=\sqrt{\langle *,*\rangle}$ zadovoljava sljedeće dvije osobine norme

(i) $\|x\|\geq 0$ i $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$.

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ za svaki skalar α.

Rj. (i) Izaberimo proizvoljno $x\in V$

$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$

$\|x\|=\sqrt{\ldots}$

Objasniti zašto su kolone matrice $U_{n\times n}$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$ ako i samo ako $U^* = U^{-1}$ (Ovakve matrice zovemo unitarne matrice).

Rj.

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da su kolone matrice U

$$U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

ortonormirana baza z $\mathbb{C}^n$. Tada ij-element matrice U^*U je

$$[U^*U]_{ij} = u_i^* u_j = \begin{cases} 1, & \text{kada } i=j \\ 0, & \text{kada } i\neq j \end{cases}$$

zato što

$$U^* = \begin{bmatrix} — & u_1^* & — \\ — & u_2^* & — \\ & \vdots & \\ — & u_n^* & — \end{bmatrix}.$$

Prema tome $U^*U = I \Rightarrow U^* = U^{-1}$.

„$\Leftarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $U^* = U^{-1}$. Tada je $U^*U = I$ tj.

$$\begin{bmatrix} — & u_1^* & — \\ — & u_2^* & — \\ & \vdots & \\ — & u_n^* & — \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = I$$

iz čega vidimo da su kolone od $\mathbb{C}^n$ ortonormirane. Ove kolone formiraju bazu zato što su ortonormirani skupovi uvijek linearno nezavisni.

Koristeći trag kao unutrašnji proizvod opisan ranije ($\langle A,B\rangle = \operatorname{trag}(A^TB)$) odrediti ugao između sljedećih parova matrica

(a) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rj. Ugao

U realnom unitarnom prostoru V, ugao u radijanima između vektora $x, y \in V$ je definisan kao broj $\theta \in [0,\pi]$ takav da

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

a) $\langle I,B\rangle = \operatorname{trag}(I^TB) = \operatorname{trag}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\|I\|^2 = \langle I,I\rangle = \operatorname{trag}(I^TI) = \operatorname{trag}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\|B\|^2 = \langle B,B\rangle = \operatorname{trag}(B^TB) = \operatorname{trag}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$.

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

b) $\langle A,B\rangle = \operatorname{trag}(A^TB) = \operatorname{trag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 6 - 6 = 0$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

\# Pokazati da je svaki ortonormiran skup linearno nezavisan.

Rj. Neka je $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ proizvoljan ortonormiran skup. Posmatrajmo jednačinu

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n=0$$

u kojoj su $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ nepoznate. Sad primjenimo osobinu unutrašnjeg proizvoda i primjetimo:

$$0=\langle u_i,\mathbf{0}\rangle=\langle u_i,\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n\rangle=$$

$$=\alpha_1\langle u_i,u_1\rangle+\dots+\alpha_i\langle u_i,u_i\rangle+\dots+\alpha_n\langle u_i,u_n\rangle$$

$$=\alpha_i\|u_i\|^2=\alpha_i \quad \text{za } \forall i.$$

Prema tome jedino rješenje jednačine

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n=0$$

je trivijalno rješenje. Skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan.

q.e.d.

\# Furijer-ov red

Neka je V unitarni prostor realno-vrijednosnih f-ja koje su integrabilne na intervalu $(-\pi,\pi)$ i u kojem su unutrašnji proizvod i norma dati sa

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx \quad \text{i} \quad \|f\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Izvesti formulu

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

za Furijer-ov red, gdje su

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad ; \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Rj. Posmatrajmo skup trigonometrijskih f-ja

$$\mathcal{B}'=\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\sin x,\sin 2x,\sin 3x,\dots\}.$$

Nije teško pokazati da je $\mathcal{B}'$ ortogonalan skup. Ako normiramo svaki vektor u skupu dobijemo ortonormiran skup

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2}{\sqrt{\pi}},\dots,\frac{\sin}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 3}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

Za proizvoljnu f-ju $f\in V$ konstruišimo Furijer-ov razvoj

$$F(x)=\alpha_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad \dots(*)$$

gdje su Furijer-ovi koeficijenti dati sa

$$\alpha_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\alpha_k = \left\langle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad \forall_{za}\, k = 1,2,3,\dots$$

$$\beta_k = \left\langle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad \forall_{za}\, k = 1,2,3,\dots$$

Ako ove koeficijente uvrstimo u (*) dobićemo Furijer-ov red

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

gdje je $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$.

Napomena: Za razliku od konačno-dimenzionalnih prostora, $F(x)$ se ne mora slagati sa orginalnom f-jom $f(x)$. Npr., F je periodična, pa nema nikakve nade da se slaže sa f ako f nije periodična.

\# Ako je $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor V, objasniti zašto

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle$$

vrijedi za svaki $x, y \in V$.

Rj:

Furijer-ov razvoj:
Ako je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor V, tada se svaki $x \in V$ može izraziti kao

$$x = \langle u_1, x \rangle u_1 + \langle u_2, x \rangle u_2 + \dots + \langle u_n, x \rangle u_n.$$

Prvo razvijmo y kao sumu

$$y = \langle u_1, y \rangle u_1 + \langle u_2, y \rangle u_2 + \dots + \langle u_n, y \rangle u_n$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, y \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \langle u_i, y \rangle u_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, y \rangle \langle x, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle$$

(#) Posmatrajmo realni unitarni prostor u kojem je $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

(a) Dokazati da, ako je $\|x\| = \|y\|$, tada $(x+y) \perp (x-y)$.

(b) Za standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^2$, skicirati sliku ovog. Tj. skicirati lokaciju od $x+y$ i $x-y$ za dva vektora sa jednakim normama.

Rj.

a) U realnom unitarnom prostoru $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

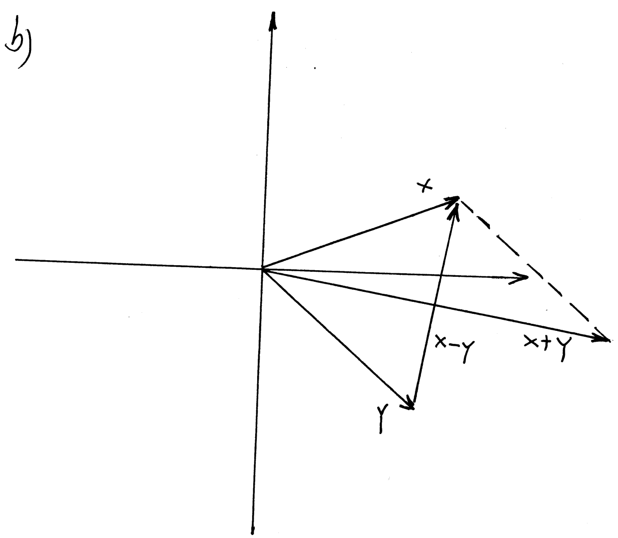
Kako je $\|x\| = \|y\|$ imamo

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x+y, x\rangle - \langle x+y, y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle - \|y\|^2 = 0$$

b)



Zadaci za vežbu

1. Provjeriti ortogonalnost sljedećih vektora

a) x i y, ako su $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) u i v, ako su $u = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(izračunati obe vrijednosti i $u^* v$ i $u^T v$)

2. Odrediti ugao između vektora $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}' = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ortogonalan skup. Uz pomoć $\mathcal{B}'$ formirati ortonormiran skup $\mathcal{B}$.

4. Odrediti Furijer-ov razvoj vektora $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ u odnosu na standardni unutrašnji proizvod i ortonormiranu bazu $\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

5. Pitagorina teorema

Neka je $\mathcal{V}$ opšti unitarni prostor u kojem je $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

(a) Kada je $\mathcal{V}$ realni prostor, dokazati da $x \perp y$ ako i samo ako $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (nešto ne bi bilo u redu ako ovo ne bi bilo tačno, zato što je definicija ortogonalnosti odavde i potekla).

(b) Konstruisati primjer koji će pokazati da implikacija u dijelu (a) ne vrijedi kada je $\mathcal{V}$ kompleksan prostor.

(c) Kada je $\mathcal{V}$ kompleksan prostor, dokazati da $x \perp y$ ako i samo ako $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ za $\forall \alpha$ i β.

11. Gram-Schmidtova procedura

(11.01) Uvod u problem
Cilj: Iskoristiti datu bazu $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ i uz pomoć nje konstruisati ortonormiranu bazu $\mathcal{O} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ za $\mathcal{S}$.
Strategija: Postepeno konstruisati $\mathcal{O}$ tako da je $\mathcal{O}_k = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{S}_k = span\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ za $k = 1, ..., n$. ◇

(11.02) Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije
Ako je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ baza za neki unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada Gram-Schmidtov niz definisan sa

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{x_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{u}_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x}_k\rangle \boldsymbol{u}_i}{\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x}_k\rangle \boldsymbol{u}_i\|} \text{ za } k = 2, ..., n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$. Kada je $\mathcal{S}$ n-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{C}^m$, Gram-Schmidtov niz se može izraziti sa

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{(I - U_k U_k^*)\boldsymbol{x}_k}{\|(I - U_k U_k^*)\boldsymbol{x}_k\|} \quad \text{za} \quad k = 1, 2, ..., n$$

gdje je $U_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^m$ i $U_k = (\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2|...|\boldsymbol{u}_{k-1})_{m \times k-1}$ za $k > 1$. ◇

(11.03) Klasični Gram-Schmidtov algoritam
Sljedeći algoritam je direktna ili "klasična" implementacija Gram-Schmidtove procedure. Oznaka $a \leftarrow b$ znači da "a definiši da bude (ili postaje) b."

Za $k = 1$:
$$\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}$$
Za $k > 1$:
$$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_i$$
$$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$
◇

(11.04) QR faktorizacija
Svaka matrica $A_{m\times n}$ sa linearno nezavisnim kolonama se može jedinstveno faktorisati kao $A = QR$ gdje su kolone od $Q_{m\times n}$ ortonormirana baza za $im(A)$ a $R_{n\times n}$ je gornje trougaona matrica sa pozitivnim dijagonalnim vrijednostima.

• QR faktorizacija je potpun "opis" Gram-Schmidtove procedure zato što su kolone od $Q = (\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|...|\boldsymbol{q}_n)$ dobijene kao rezultat primjene Gram-Schmidtovog procesa na kolone matrice $A = (\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|...|\boldsymbol{a}_n)$ a matrica R je data sa

$$R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_3 & ... & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_n \\ 0 & \nu_2 & \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{a}_3 & ... & \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{a}_n \\ 0 & 0 & \nu_3 & ... & \boldsymbol{q}_3^*\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \nu_n \end{bmatrix}$$

gdje je $\nu_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|$ i $\nu_k = \|\boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{a}_k\rangle \boldsymbol{q}_i\|$ za $k > 1$. ◇

(11.05) Linearni sistemi i QR faktorizacija
Ako je $rang(A_{m\times n}) = n$, i ako je $A = QR$ dobijena QR faktorizacija, tada rješenje nesingularnog trougaonog sistema

$$R\boldsymbol{x} = Q^\top \boldsymbol{b}$$

je ili riješenje problema najmanjih kvadrata sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ili riješenje istog sistema u zavisnosti da li je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saglasan sistem. ◇

(11.06) Modifikovani Gram-Schmidtov algoritam
Za linearno nezavisan skup $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{C}^m$ Gram-Schmidtov niz dat u 11.02 se može napisati i na drugi način kao

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{E_k...E_2E_1\boldsymbol{x}_k}{\|E_k...E_2E_1\boldsymbol{x}_k\|} \quad \text{gdje je } E_1 = I, \;\; E_i = I - \boldsymbol{u}_{i-1}\boldsymbol{u}_{i-1}^* \text{ za } \; i > 1,$$

i ovaj niz je generisan pomoću sljedećeg algoritma:

Za $k = 1$: $\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \boldsymbol{x}_1/\|\boldsymbol{x}_1\|$ i $\boldsymbol{u}_j \leftarrow \boldsymbol{x}_j$ za $j = 2, 3, ..., n.$
Za $k > 1$: $\boldsymbol{u}_j \leftarrow E_k\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j - (\boldsymbol{u}_{k-1}^*\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_{k-1}$ za $j = k, k+1, ..., n.$
$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \boldsymbol{u}_k/\|\boldsymbol{u}_k\|.$ ◇

(11.07) Sažetak
• Kada Gram-Schmidtov proces (klasičan ili modifikovan) primjenimo na kolone matrice A koristeći tačnu aritmetiku, svaki put dobijamo ortonormiranu bazu za $im(A)$.

• Za računanje QR faktorizacije u aritmetici pokretnog zareza, modifikovani algoritam proizvodi rezultate koji su dovoljno dobri a često i bolji od klasičnog algoritma, ali modificirani algoritam nije bezuslovno stabilan - postoje situacije u kojima će proizvesti skup kolona koje nisu ni približno ortogonalne.

• Za rješenje problema najmanjeg kvadrata sa aritmetikom pokretnog zareza, modificirana procedura je numerički stabilan algoritam u smislu da metoda opisana u jednom od primjera vraća rezultat koji je tačno rješenje susjednog problema najmanjih kvadrata. Kakogod, Hauseholderova metoda (koju nismo radili ali možete tražiti papire da kopirate od predmetnog nastavnika ili predmetnog asistenta) je dovoljno stabilna a potrebno joj je dosta manje aritmetičkih operacija. ◇

(#) Koristeći klasičnu formulaciju Gram-Schmidt-ove procedure pronaći ortonormiranu bazu za prostor generisan pomoću sljedeća tri linearno nezavisna vektora

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Rj.

Klasični Gram-Schmidt-ov algoritam:

Za $k=1$

$$u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

Za $k>1$

$$u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, u_i\rangle u_i$$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

gdje je tumačenje za $a \leftarrow b$: "a definiši da bude b" ili "a postaje b".

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \|x\|_1^2=\langle x_1,x_1\rangle = x_1^T x_1 = (1\ 0\ 0\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=2.$$

$$\|x\|_1=\sqrt{2}$$

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_2' = x_2 - \underbrace{\langle x_2,u_1\rangle}_{x_2^T u_1} u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix} - (1\ 2\ 0\ -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \|u_2'\|^2=4$$

$$\|u_2'\|=2$$

$$u_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3' = x_3 - \langle x_3,u_1\rangle u_1 - \langle x_3,u_2\rangle u_2$$

$$\langle x_3,u_1\rangle = x_3^T u_1 = (3\ 1\ 1\ -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(3+0+0+1)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\langle x_3,u_2\rangle = x_3^T u_2 = (3\ 1\ 1\ -1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=1$$

$$u_3'=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}-2\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\|u_3'\|^2=3$$

$$\|u_3'\|=\sqrt{3} \qquad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

je tražena ortonormirana baza.

Odrediti QR faktorizaciju matrice

ν grčko slovo ni

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rj. Svaku matricu $A=(a_1|a_2|\dots|a_n)$ sa linearno nezavisnim kolonama $a_1, a_2, \dots, a_n$ možemo jedinstveno faktorisati kao

$$A=QR=(q_1|q_2|\dots|q_n)\begin{pmatrix} \nu_1 & \langle a_2,q_1\rangle & \langle a_3,q_1\rangle & \dots & \langle a_n,q_1\rangle \\ 0 & \nu_2 & \langle a_3,q_2\rangle & \dots & \langle a_n,q_2\rangle \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & \langle a_n,q_3\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}$$

gdje je $q_1=\dfrac{a_1}{\nu_1}$, $q_k=\dfrac{a_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle a_k,q_i\rangle q_i}{\nu_k}$, $\nu_1=\|a_1\|$,

$$\nu_k=\Big\|a_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle a_k,q_i\rangle q_i\Big\|.$$

Prvo provjerimo da su kolone matrice A linearno nezavisne. Ovo je ekvivalentno sa provjerom da je $\det A\neq 0$. (objasniti zašto?)

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & -20 & 7 \\ 3 & 27 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_v-III_v\cdot 7}{\underset{II_v-III_v\cdot 2}{=}} (-2)\begin{vmatrix} -28 & -97 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix} -28 & -97 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\cdot 5\begin{vmatrix} -28 & -97 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(-10)\cdot(-28-97)\neq 0$$

Prema tome vektori $a_1=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}-20\\27\\11\end{pmatrix}$ i $a_3=\begin{pmatrix}-14\\-4\\-2\end{pmatrix}$ su linearno nezavisni.

$\|a_1\|^2=(0\ 3\ 4)\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=25$ $\qquad q_1=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$, $\nu_1=5$

$\|a_1\|=5$

$$q_2=\frac{a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1}{\|a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1\|}$$

$\langle a_2,q_1\rangle=(-20\ 27\ 11)\cdot\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}(81+44)=\dfrac{1}{5}\cdot 125=25$

$a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1=\begin{pmatrix}-20\\27\\11\end{pmatrix}-25\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\27\\11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-15\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\12\\-9\end{pmatrix}$

$\|a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1\|^2=400+144+81=625$

$\|a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1\|=25$

$q_2=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-20\\12\\-9\end{pmatrix}$, $\qquad \nu_2=25$

$$q_3=\frac{a_3-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_3,q_2\rangle q_2}{\|a_3-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_3,q_2\rangle q_2\|}$$

$\langle a_3,q_1\rangle=(-14\ -4\ -2)\,\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}(-12-8)=-4$

$\langle a_3,q_2\rangle=(-14\ -4\ -2)\,\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-20\\12\\-9\end{pmatrix}=\dfrac{1}{25}(280-48+18)=\dfrac{250}{25}=10$

$a_3-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_3,q_2\rangle q_2=\begin{pmatrix}-14\\-4\\-2\end{pmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}-\dfrac{10}{25}\begin{pmatrix}-20\\12\\-9\end{pmatrix}=$

$=\dfrac{1}{25}\left(25\begin{pmatrix}-14\\-4\\-2\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}-20\\12\\-9\end{pmatrix}\right)=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-150\\-160\\120\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-30\\-32\\24\end{pmatrix}$

$a_3-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_3,q_2\rangle q_2=\dfrac{2}{5}\begin{pmatrix}-15\\-16\\12\end{pmatrix}$

$\|a_2-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_2,q_2\rangle q_2\|^2=\dfrac{4}{25}(-15\ -16\ 12)\begin{pmatrix}-15\\-16\\12\end{pmatrix}=\dfrac{4}{25}\cdot 625=4\cdot 25=100$

$\|a_3-\langle a_3,q_1\rangle q_1-\langle a_3,q_2\rangle q_2\|=10$

$q_3=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-15\\-16\\12\end{pmatrix}$, $\quad \nu_3=10$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{20}{25} & -15/25 \\ 3/5 & 12/25 & -16/25 \\ 4/5 & -9/25 & 12/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

tražena faktorizacija

(#) Koristeći aritmetiku sa 3-decimalna mjesta primjeniti modificirani Gram-Schmidt-ov algoritam na skup

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix}$$

Rj: Klasični Gram-Schmitov algoritam nije dobar u slučaju kada se pojavi broj sa decimalnim zarezom, tj. nije baš dobar numerički algoritam. U tom slučaju koristimo modificirani Gram-Schmidtov algoritam:

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

$u_j \leftarrow x_j$ za $j=2,3,\dots,n$

Za $k>1$: $u_j \leftarrow E_k u_j = u_j - \langle u_j, u_{k-1}\rangle u_{k-1}$ za $j=k,k+1,\dots,n$

$u_k \leftarrow \dfrac{u_k}{\|u_k\|}$

Drugačiji opis ovog algoritma je sljedeći

$$\{x_1,x_2,\dots,x_n\} \xrightarrow{\text{normalizirati 1-vi vektor}} \{u_1,x_2,\dots,x_n\}$$
$$\xrightarrow{\text{primjeniti } E_2} \{u_1,E_2x_2,E_2x_3,\dots,E_2x_n\}$$
$$\xrightarrow{\text{normalizirati 2-gi vektor}} \{u_1,u_2,E_2x_3,\dots,E_2x_n\}$$
$$\xrightarrow{\text{primjeniti } E_3} \{u_1,u_2,E_3E_2x_3,\dots,E_3E_2x_n\}$$
$$\xrightarrow{\text{normalizirati 3-ći vektor}} \{u_1,u_2,u_3,E_3E_2x_3,\dots,E_3E_2x_n\}$$

i t.d.

gdje je $E_1=I$, $E_i = I - u_{i-1}u_{i-1}^*$ za $i>1$

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{pmatrix},\quad u_1=\frac{E_1x_1}{\|E_1x_1\|},\ \text{gdje je } E_1=I$$

$$\|x_1\|^2 = x_1^Tx_1 = (1\ 10^{-3}\ 10^{-3})\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{pmatrix} = 1+10^{-6}+10^{-6}\approx 1$$

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{pmatrix}$$

$$x_2=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\frac{E_2E_1x_2}{\|E_2E_1x_2\|},\ \text{gdje je } E_1=I,\ E_i=I-u_{i-1}u_{i-1}^T \text{ za } i>1$$

$$E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&10^{-3}&10^{-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&10^{-3}&10^{-3}\\10^{-3}&10^{-6}&10^{-6}\\10^{-3}&10^{-6}&10^{-6}\end{bmatrix}$$

$$E_2=\begin{bmatrix}0&-10^{-3}&-10^{-3}\\-10^{-3}&1-10^{-6}&-10^{-6}\\-10^{-3}&-10^{-6}&1-10^{-6}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&-10^{-3}&-10^{-3}\\-10^{-3}&1&0\\-10^{-3}&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_2E_1x_2=\begin{bmatrix}0&-10^{-3}&-10^{-3}\\-10^{-3}&1&0\\-10^{-3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10^{-6}\\0\\-10^{-3}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\\-10^{-3}\end{bmatrix}$$

$$\|E_2E_1x_2\|^2=(0\ 0\ -10^{-3})\begin{pmatrix}0\\0\\-10^{-3}\end{pmatrix}=10^{-6}$$

$$\|E_2E_1x_2\|=10^{-3}$$

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_3=\frac{1}{10^{-3}}\begin{bmatrix}0\\-10^{-3}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Prema tome modificirana Gram-Schmitova procedura daje vektore $u_1=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\10^{-3}\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ i $u_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix},\quad u_3=\frac{E_3E_2E_1x_3}{\|E_3E_2E_1x_3\|},\ \text{gdje je } E_1=I,\ E_i=I-u_{i-1}u_{i-1}^T,\ i>1$$

$$E_3=I-u_2u_2^T=I-\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1x_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-10^{-3}&-10^{-3}\\-10^{-3}&1&0\\-10^{-3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-10^{-3}&-10^{-3}\\-10^{-3}&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10^{-6}\\-10^{-3}\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\-10^{-3}\\0\end{bmatrix}$$

$$\|E_3E_2E_1x_3\|^2=10^{-6}\Rightarrow\|E_3E_2E_1x_3\|=10^{-3}$$

(#) Neka je $\mathcal{S}=\operatorname{span}\left\{x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ x_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

a) Uz pomoć klasičnog Gram-Schmidtovog algoritma (sa tačnom aritmetikom) odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{S}$.

b) Direktno provjeriti da Gram-Schmidtov niz, proizveden pod (a), je zaista ortonormirana baza za $\mathcal{S}$

c) Ponoviti dio pod a) koristeći modifikovani Gram-Schmidtov algoritam, i uporediti rezultate.

Rj.

a) Ako je $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ baza za unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada Gram-Schmidtov niz definisan sa

$$u_1=\frac{x_1}{\|x_1\|} \quad i \quad u_k=\frac{x_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k,u_i\rangle u_i}{\left\|x_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k,u_i\rangle u_i\right\|} \quad \text{za } k=2,3,\dots,n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$.

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \|x_1\|^2=(1\ 1\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=4 \qquad u_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\|x_1\|=2$

$$x_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\frac{x_2-\langle x_2,u_1\rangle u_1}{\|x_2-\langle x_2,u_1\rangle u_1\|}$$

$$\langle x_2,u_1\rangle = x_2^T u_1 = (2\ -1\ -1\ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$x_2-\langle x_2,u_1\rangle u_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}8\\-4\\-4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\-3\\-3\\3\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\|x_2-\langle x_2,u_1\rangle u_1\|^2=\frac{3}{4}(3\ -1\ -1\ 1)\cdot\frac{3}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{9}{16}\cdot(9+1+1+1)=\frac{9}{\cancel{16}}\cdot\cancel{12}=\frac{9}{4}\cdot 3$$

$$\|x_2-\langle x_2,u_1\rangle u_1\|=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$u_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad u_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$x_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\quad u_3=\frac{x_3-\langle x_3,u_1\rangle u_1-\langle x_3,u_2\rangle u_2}{\|x_3-\langle x_3,u_1\rangle u_1-\langle x_3,u_2\rangle u_2\|}$$

$$\langle x_3,u_1\rangle=(-1\ 2\ 2\ 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(-1+2+2-1)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

$$\langle x_3,u_2\rangle=(-1\ 2\ 2\ 1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(-3-2-2+1)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(-6)=-\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$x_3-\langle x_3,u_1\rangle u_1-\langle x_3,u_2\rangle u_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-2\\4\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\|x_3-\langle x_3,u_1\rangle u_1-\langle x_3,u_2\rangle u_2\|^2=1+1+4=6$$

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Prema tome ortonormirana baza za $\mathcal{S}$ je

$$u_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad u_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

b) provjera

$$\langle u_1,u_1\rangle=\frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ -1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

$$\langle u_1,u_2\rangle=\frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ -1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot 0=0$$

$$\langle u_1,u_3\rangle=\frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot 0=0$$

$$\langle u_3,u_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(0\ 1\ 1\ 2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 6=1$$

$$\langle u_3,u_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(0\ 1\ 1\ 2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{18}}(0-1-1+2)=0$$

$$\langle u_2,u_2\rangle=\frac{1}{2\sqrt{3}}(3\ -1\ -1\ 1)\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot 12=1$$

c) Modifikovan Gram-Schmidtov algoritam izgleda ovako:

$k=1:\quad u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|},\quad u_j \leftarrow x_j \quad$ za $j=2,3,\dots,n$

$k>1:\quad u_j \leftarrow E_k u_j = u_j - (u_{k-1}^* u_j)\, u_{k-1} \quad$ za $j=k,k+1,\dots,n$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|} \qquad\qquad E_i = I - u_{i-1}u_{i-1}^* \quad i>1$$

$$\mathcal{B} = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$k=1:$

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{4} = 2$$

$$u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad u_3 \leftarrow \begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$k=2:$

$$u_2 \leftarrow E_2 u_2 = u_2 - (u_1^T u_2)\, u_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8+1\\-4+1\\-4+1\\4-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\-3\\-3\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_3 \leftarrow E_2 u_3 = u_3 - (u_1^T u_3)\, u_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-1\\4-1\\4-1\\2+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{9}{16}(9+1+1+1) = \frac{9\cdot 12}{16} = \frac{9\cdot 3}{4} \implies \|u_2\| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Za sad

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad u_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad u_3 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$k=3:$

$$u_3 \leftarrow E_3 u_3 = u_3 - (u_2^T u_3)\, u_2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\overset{-1}{\cancel{\overset{-2}{\cancel{(-4)}}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3+3\\3-1\\3-1\\3+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$u_3 \leftarrow \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad u_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

(#) Koristeći Gram-Schmidt-ovu proceduru pronaći ortonormirane baze za četri fundamentalna podprostora od $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\2&-4&6&-2\\3&-6&9&-3\end{pmatrix}$.

Rj.

Prisjetimo se

$im(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A

$im(A^T)$ = prostor generisan pomoću redova matrice A

$im(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

$im(A) := \{Ay \mid y \in \mathbb{R}^m\}$ za $A_{m\times n}$

$ker(A) := \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$

$ker(A)$ = prostor generisan linearno nezavisnim skupom koji čine rješenja linearne jednačine $Ax=0$

$ker(A^T)$ = prostor generisan pomoću zadnjih $m-r$ redova matrice P, gdje je P nesingularna matrica takva da $PA=U$, U u red ešelon obliku, $rang(A)=r$.

Prvo svedimo A na reducirani red ešelon oblik da bi odredili "obične" baze za svaki od prostora.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\2&-4&6&-2\\3&-6&9&-3\end{pmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=E_A$$

Nenula redovi od E_A generišu $im(A^T)$

Osnovne kolone od A generišu $im(A)$

$$im(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\},\qquad im(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Da bi odredili generator skup za $im(A)$ rješimo sistem

$Ax=0$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&0\\2&-4&6&-2&0\\3&-6&9&-3&0\end{array}\right)\underset{III_v+I_v(-3)}{\overset{II_v+I_v(-2)}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$rang\, A = rang\, \bar{A} = 1 < 4$

3 promjenjive uzimamo proizvoljno

$x_2=s,\quad x_3=t,\quad x_4=u$

$x_1=2s-3t+4u$

Rješenje je oblika $$x=\begin{pmatrix}2s-3t+4u\\s\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

$$ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Sad odredimo matricu P takvu da $PA=U$ tj. svedimo matricu $(A \mid I)$ na oblik $(U \mid P)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-1&1&0&0\\2&-4&6&-2&0&1&0\\3&-6&9&-3&0&0&1\end{array}\right)\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-1&1&0&0\\0&0&0&0&-2&&0\\0&0&0&0&-3&0&1\end{array}\right)$$

$rang\, A=1$, $A_{3\times4}$, $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $ker(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Prema tome

$$ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad ker(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Sad primjenimo Gram-Schmidtovu proceduru na svaki od ovih prostora.

a) $im(A) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\|u_1\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$im(A) = span\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

b) $im(A^T) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $u_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\|u_1\|^2 = \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15}$

$im(A^T) = span\left\{\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

c) $ker(A) = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $x_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Klasični Gram-Schmidtov algoritam za $\mathbb{R}^n$

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_i^T x_k) u_i$

$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$

$a \leftarrow b$ tumačiti kao a definiši da bude b

$k=1$:

$\|x_1\| = \sqrt{5}$, $u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$-6+0+0+0$

$u_1^T x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-6)$

$k=2$: $u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^T x_2) u_1$

$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$(u_1^T x_2) u_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{-6}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-15+12\\0+6\\5+0\\0+0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}$

$\|u_2\| = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{9+36+25} = \frac{\sqrt{70}}{5}$

$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}$

Prema tome $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$k=3$:

$u_3 \leftarrow x_k - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2$

$u_3 \leftarrow \frac{u_3}{\|u_3\|}$

$u_1^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(2+0+0+0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$(u_1^T x_3) u_1 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$u_2^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3+0+0+0) = \frac{-3}{\sqrt{70}}$

$(u_2^T x_3) u_2 = \frac{-3}{70}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}$

$x_k - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{70}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{70}\left(70\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - 2\cdot 14\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{70}\begin{pmatrix}5\\-10\\15\\70\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\14\end{pmatrix}$

$u_3 \leftarrow \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\14\end{pmatrix}$, $\|u_3\| = \frac{1}{14}\sqrt{1+4+9+196} = \frac{\sqrt{210}}{14}$

$u_3 = \frac{1}{\sqrt{210}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\14\end{pmatrix}$. Prema tome $ker(A) = span\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\6\\5\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{210}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\14\end{pmatrix}\right\}$

d) ... ZA VJEŽBU ...

Rj: $ker(A^T) = span\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}\right\}$.

\# Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Odrediti pravougaonu QR faktorizaciju od A.

(b) Koristeći QR faktorizaciju iz dijela (a) odrediti rješenje za aproksimaciju pomoću najmanjih kvadrata.

Rj.

Posmatrajmo skup $\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_i^T x_k) u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju

$k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

$k=2$: $u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^T x_2) u_1$

$$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$k=3$: $u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2$

$$u_3 \leftarrow \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$k=1$: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|x_1\| = \sqrt{x_1^T x_1} = \sqrt{3}$, $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k=2$: $u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^T x_2) u_1$ $\qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_1^T x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} 3 = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$(u_1^T x_2) u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \|u_2\| = \sqrt{3}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prema tome $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k=3$: $u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2$

$$u_3 \leftarrow \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$$u_1^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1+1-3+0) = -\frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad (u_1^T x_3) u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1+1+0+1) = \frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad (u_2^T x_3) u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 \leftarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \|u_3\| = \sqrt{6}.$$

Prema tome

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

a) QR Faktorizacija

Svaka matrica $A_{m\times n}$ sa linearno nezavisnim kolonama se može jedinstveno faktorisati kao $A=QR$ gdje su kolone od Q ortonormirana baza za $im(A)$, a R je gornje trougaona matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima. Kolone od $Q=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ q_1 & q_2 & \dots & q_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$ su rezultat primjene Gram-Schmidt-ove procedure na kolone od A $A=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$ a R je dat sa

$$R = \begin{pmatrix} \nu_1 & q_1^* a_2 & q_1^* a_3 & \dots & q_1^* a_n \\ 0 & \nu_2 & q_2^* a_3 & \dots & q_2^* a_n \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & q_3^* a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}$$

gdje $\nu_1 = \|a_1\|, \dots, \nu_k = \|a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle q_i, a_k\rangle q_i\|$ za $k>1$

U našem slučaju $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ i

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & q_1^T x_2 & q_1^T x_3 \\ 0 & \sqrt{3} & q_2^T x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad q_1^T x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3$$

$$q_1^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\1\end{pmatrix} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$q_2^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1\ 1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

b) Aproksimacija pomoću najmanjih kvadrata

Neka je $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^m$ i neka je $\varepsilon = \varepsilon(x) = Ax-b$. Problem kako pronaći vektor x koji će minimizirati vrijednost

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = \varepsilon^T\varepsilon = (Ax-b)^T(Ax-b)$$

zovemo aproksimacija pomoću najmanjih kvadrata.

Linearni sistemi i QR faktorizacija

Ako je $rang(A_{m\times n}) = n$, i ako je $A=QR$ QR faktorizacija, tada rješenje od nesingularnog trougaonog sistema $Rx = Q^Tb$ je ili rješenje od $Ax=b$ ili rješenje za aproksimaciju pomoću najmanjih kvadrata od $Ax=b$, u zavisnosti da li je $Ax=b$ saglasan sistem.

Sistem $QRx = Q^Tb$ (gornje trougaoni sistem) nije teško riješiti (ZA VJEŽBU)

$$x = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(#) Primeniti Gram-Schmidt-ovu proceduru sa standardnim unutrašnjim proizvodom za $\mathbb{C}^3$ na $\left\{\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ i\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.: Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_i^* x_k) u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju $x_1 = \begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0\\ i\\ i\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\end{pmatrix}$ pa je

$k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x\|_1}$

$k=2$: $u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^* x_2) u_1$

$u_2 \leftarrow \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$

$k=3$: $u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^* x_3) u_1 - (u_2^* x_3) u_2$

$u_3 \leftarrow \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

$$x_1 = \begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}, \quad \|x_1\| = \sqrt{x_1^* x_1} = \sqrt{(-i\ -i\ -i)\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}} = \sqrt{-i^2 - i^2 - i^2} = \sqrt{3}$$

$$u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}$$

$$u_1^* x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i\ -i\ -i)\begin{pmatrix} 0\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^* x_2) u_1$$

$$(u_1^* x_2) u_1 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix} 0\\ i\\ i\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 - 2i\\ 3i - 2i\\ 3i - 2i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix}, \quad \|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix}$$

$$u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^* x_3) u_1 - (u_2^* x_3) u_2$$

$$u_1^* x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i\ -i\ -i)\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (u_1^* x_3) u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}$$

$$u_2^* x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2i\ -i\ -i)\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad (u_2^* x_3) u_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix}$$

$$u_3 \leftarrow \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 - 2i + 2i\\ 0 - 2i - i\\ 6i - 2i - i\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0\\ -3i\\ 3i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0\\ -i\\ i\end{pmatrix}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(1+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad u_3 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\ -i\\ i\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2i\\ i\\ i\end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\ -i\\ i\end{pmatrix}.$$

Objasniti šta će se desiti kada se Gram-Schmidtov proces primjeni na ortonormirani skup vektora.

Rj.:

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$

Pa neka je $\mathcal{B}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ortonormiran skup vektora. Primjenimo Gram-Schmidtov algoritam

$k=1$: $\|x_1\|=1 \Rightarrow u_1 \leftarrow x_1 \Rightarrow u_1 = x_1$

$k=2$:

$$u_2 \leftarrow x_2 - \underbrace{\langle u_1, x_2 \rangle}_{=\langle x_1, x_2 \rangle = 0} u_1 \Rightarrow u_2 \leftarrow x_2$$

$$\|u_2\| = \|x_2\| = 1 \Rightarrow u_2 = x_2$$

$\vdots$

$k=n$: $u_n \leftarrow x_n - \underbrace{\langle u_1, x_n \rangle}_{=0} u_1 - \underbrace{\langle u_2, x_n \rangle}_{=0} u_2 - \dots - \underbrace{\langle u_{n-1}, x_n \rangle}_{=0} u_{n-1}$

$u_n \leftarrow x_n$, $\|u_n\| = \|x_n\| = 1$. $\Rightarrow u_n = x_n$.

Prema tome ako Gram-Schmidtov proces primjenimo na ortonormiran skup vektora neće se desiti ništa. Ortonormirani skup vektora koji se dobije kao rezultat je isti kao i orginalni.

Objasniti šta će se desiti kada se Gram-Schmidtov proces primjeni na linearno zavisan skup vektora.

Rj.

Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije

Ako je $\mathcal{B}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ baza za unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada Gram-Schmidt-ov niz definisan sa

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \text{i} \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i \right\|} \quad \text{za } k=2,\dots,n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$.

Algoritam će pasti na prvom vektoru za koji vrijedi

$$x_k \in span\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

zato što, ako $x_k \in span\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\} = span\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ tada će Furijer-ov razvoj od x_k u odnosu na $span\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ biti $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

pa, prema tome

$$u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\left\| x_k - \sum \langle u_i, x_k \rangle u_i \right\|} = \frac{0}{\|0\|}$$

nije definisano.

(#) (a) Primjeniti klasični Gram-Schmidtov algoritam, koristeći aritmetiku sa tri decimalna mjesta, na $\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Možete pretpostaviti da je $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

(b) Ponovo koristeći aritmetiku sa tri decimalna mjesta, primjeniti modificirani Gram-Schmidt-ov algoritam na $\{x_1, x_2, x_3\}$, i porediti rezultate sa dijelom (a).

Rj.

a) Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_i^T x_k) u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju

$k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

$k=2$: $u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^T x_2) u_1$, $u_2 \leftarrow \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$

$k=3$: $u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2$, $u_3 \leftarrow \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

$k=1$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \|x_1\| = \sqrt{1+0+10^{-6}} \approx 1 \Rightarrow u_1 \leftarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$k=2$:

$$u_1^T x_2 = (1 \ \ 0 \ \ 10^{-3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$u_2 \leftarrow x_2 - (u_1^T x_2) u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \|u_2\| = \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k=3$:

$$u_1^T x_3 = (1 \ \ 0 \ \ 10^{-3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad u_2^T x_3 = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(u_1^T x_3) u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$u_3 \leftarrow x_3 - (u_1^T x_3) u_1 - (u_2^T x_3) u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{0+10^{-6}+10^{-6}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 10^{-3}\sqrt{2} \approx 10^{-3} \cdot 1{,}41$$

$$u_3 \leftarrow \frac{1}{10^{-3} \cdot 1{,}41} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}709 \\ -0{,}709 \end{pmatrix}$$

Prema tome, rezultat klasičnog Gram-Schmidtovog algoritma, koristeći aritmetiku sa tri decimalna mjesta, je

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.709 \\ -0.709 \end{pmatrix}$$

što nije baš dobro, zato što u_2 i u_3 nisu čak ni približno ortogonalni.

(b) Modificirani Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$, $u_j \leftarrow x_j$ za $j=2,3,\dots,n$

Za $k>1$ $\quad u_j \leftarrow u_j - (u_{k-1}^T u_j) u_{k-1}$ za $j=k, k+1, \dots, n$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju:

$k=1$: $u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $u_2 \leftarrow x_2$, $u_3 \leftarrow x_3$

$k=2$: $u_2 \leftarrow u_2 - (u_1^* u_2)\, u_1$

$u_3 \leftarrow u_3 - (u_1^* u_3)\, u_1$

$u_2 \leftarrow \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$k=3$: $u_3 \leftarrow u_3 - (u_2^* u_3)\, u_2$

$u_3 \leftarrow \frac{u_3}{\|u_3\|}$

$\|x_1\| = \sqrt{1+0+10^{-6}} \approx 1$

$k=1$: $u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$, $u_2 \leftarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 \leftarrow x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$k=2$: $u_1^T u_2 = (1 \ 0 \ 10^{-3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $u_1^T u_3 = (1 \ 0 \ 10^{-3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$u_2 \leftarrow u_2 - (u_1^T u_2) u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^{-3} \end{pmatrix}$, $\|u_2\| = 10^{-3}$

$u_3 \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix}$, $u_2 \leftarrow \frac{1}{10^{-3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$k=3$: $u_2^T u_3 = (0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix} = 10^{-3}$

$u_3 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|u_3\| = 10^{-3}$

Prema tome, modificirani Gram-Schmidtov algoritam daje

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

što je dovoljno blizu ortonormiranom skupu s obzirom da smo koristili aritmetiku sa 3 decimalna mjesta.

Zadaci za vježbu

(1.) Za dati linearno nezavisan skup vektora $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ u unitarnom prostoru, neka je $\mathcal{S}_k = span\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ za $k = 1, 2, \dots, n$. Matematičkom indukcijom pokazati da ako je $\mathcal{O}_k = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ Gram-Schmidtov niz (definisan ranije), tada je $\mathcal{O}_k$ zaista ortonormirana baza za $\mathcal{S}_k = span\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ za svaki $k = 1, 2, \dots, n$.

(2.) Dokazati da ako je $rang(A_{m \times n}) = n$, tada je pravougaona QR faktorizacija od A jedinstvena, tj. ako je $A = QR$, gdje $Q_{m\times n}$ ima ortonormirane kolone i $R_{n \times n}$ je gornje trougaona sa pozitivnim dijagonalnim elementima tada su Q i R jedinstvene.

(3.) Neka je $\mathcal{V}$ unitarni prostor realno-vrijednosnih neprekidnih f-ja definisanih na intervalu $[-1, 1]$, gdje je unutrašnji proizvod definisan sa

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx,$$

i neka je $\mathcal{S}$ podprostor od $\mathcal{V}$ koji je generisan sa tri linearno nezavisna polinoma $q_0 = 1$, $q_1 = x$, $q_2 = x^2$.

(a) Koristeći Gram-Schmidtov proces odrediti ortonormiran skup polinoma $\{p_0, p_1, p_2\}$ koji generišu $\mathcal{S}$. Dobijeni polinomi su prva tri normirana Legendre-ova polinoma.

(b) Provjeriti da li p_n-ovi zadovoljavaju Legendre-ovu diferencijalnu jednačinu $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ za $n = 0, 1, 2$. Ova jednačina i njezina rješenja su od velike važnosti u primijenjenoj matematici.

12. Komplementarni podprostori

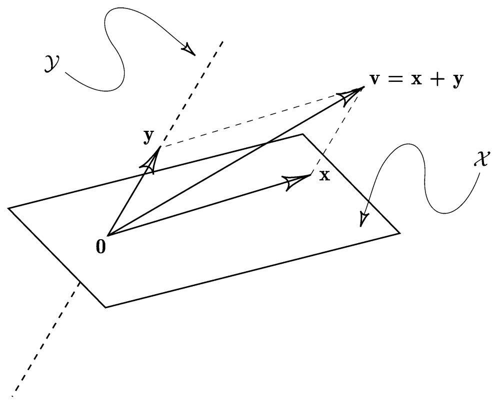
(12.01) Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su *komplementarni* podprostori kadgod je

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \text{i} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0},$$

i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je *direktna suma* od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. (Suma podprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ je prema definiciji skup $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}$.)

- Za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ koji imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.
  - ▷ $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.
  - ▷ Za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.
  - ▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$. ◇



(12.02) Projekcija

Pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ tako da za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$.

- Vektor $\boldsymbol{x}$ zovemo *projekcija* od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.
- Vektor $\boldsymbol{y}$ zovemo projekcija od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$. ◇

(12.03) Projektori

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ tako da se svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ može na jedinstven način prikazati kao suma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$. Jedinstveni linearni operator P definisan sa $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ zovemo *projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$*, i P ima sljedeće osobine.

- $P^2 = P$ (P je idempotent).
- $I - P$ je komplementarni projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.
- $im(P) = \{\boldsymbol{x} \,|\, P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ (je skup "fiksiranih tački" za P).
- $im(P) = ker(I - P) = \mathcal{X}$ i $im(I - P) = ker(P) = \mathcal{Y}$.
- Ako je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$, tada je P dat sa

$$P = [X|\mathbf{0}][X|Y]^{-1} = [X|Y] \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [X|Y]^{-1},$$

gdje su kolone od X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. ◇

(12.04) Projektori i idempotenti

Linearni operator P definisan na $\mathcal{V}$ je projektor ako i samo ako $P^2 = P$. ◇

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori od $\mathbb{R}^3$ čije su baze redom

$$\mathcal{B}_\mathcal{X} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

(a) Objasniti zašto su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori od $\mathbb{R}^3$.

(b) Odrediti projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ kao i komplementarni projektor Q na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(c) Odrediti projekciju od $v = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(d) Provjeriti da li su i P i Q idempotenti.

(e) Provjeriti da li je $im(P) = \mathcal{X} = ker(Q)$ i $ker(P) = \mathcal{Y} = im(Q)$.

Rj.

(a) Za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ koje imaju redom baze $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \text{za } \forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y} \text{ takvi da } v = x + y \iff \mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset \text{ i } \mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y} \text{ je baza za } \mathcal{V}$$

Provjerimo da li je $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ linearno nezavisan skup.

kolone matrice $A_{n \times n}$ formiraju linearno nezavisan skup $\iff ker(A) = \{\mathbf{0}\} \iff rang(A) = n$

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix} \overset{II_v - I_v}{\underset{III_v - I_v}{\sim}} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix} \overset{II_v - III_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ je linearno nezavisan skup

Da li je $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$? ZAŠTO?

Prema tome $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su komplementarni podprostori od $\mathbb{R}^3$.

(b) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$). Tada projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ je dat sa $P = [X \mid \mathbf{0}][X \mid Y]^{-1}$ gdje su kolone za X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$.

$I - P$ je komplementarni projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

$$[X \mid \mathbf{0}] = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}, \quad [X \mid Y] = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}, \quad [X \mid Y]^{-1} = ?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\underset{III_v - I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right] \overset{III_v - II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\overset{II_v - III_v}{\underset{I_v - II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right] \Rightarrow [X \mid Y]^{-1} = \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix}.$$

$$Q = I - P = \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}.$$

(c) Projekcija od $v = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$ je

$$Qv = \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

d)

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix} = P$$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix} = Q$$

P i Q su idempotenti

(e) $im(P) = \{Px \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ = prostor generisan pomoću kolona matrice P

$ker(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Qx = 0\}$

$\mathcal{X} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Znamo da

$im(A^T) = im(B^T)$ akko $A \overset{red}{\sim} B$

Pa neka je $A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix} = P$; $B^T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

primijetimo da je $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\} = im(A^T) = im(P)$

$span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\} = im(B^T) = \mathcal{X}$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{II_v - I_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{II_v : 3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E_A$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \overset{II_v - I_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{I_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = E_B$$

Odavde vidimo da je $im(P) = \mathcal{X}$.

Odredimo bazu za $ker(Q)$.

$$Qx = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[Q \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c}-x_2 + x_3 = 0\\ x_2 = x_3\\ rang\, Q = rang\, \overline{Q} < 3\end{array}$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno npr

$x_1 = t,\ x_2 = s \Rightarrow x_3 = s \quad x = \begin{pmatrix}t\\s\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot t + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot s$

$ker(Q) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Neka je

$C^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ Tada je $im(C^T) = ker\, Q$

$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = E_C$

Prema tome $im(P) = \mathcal{X} = ker(Q)$.

Da bi pokazali da je $ker(P) = \mathcal{Y} = im(Q)$, između ostalog primijetimo da $P\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ zajedno sa činjenicom da je $dim(ker(P)) = 3 - rang(P)$.

Za vježbu detaljno raspisati ovaj zadnji slučaj ($ker(P) = \mathcal{Y} = im(Q)$?).

\# Konstruisati primjer za par netrivijalnih komplementarnih podprostora iz $\mathbb{R}^5$, i objasniti zašto je dati primjer tačan.

Rj. Znamo da za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ koji redom imaju baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne

$$\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y} \iff \forall v\in\mathcal{V}\ \exists!\, x\in\mathcal{X},\, y\in\mathcal{Y}\ \ v=x+y \iff \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cap\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\emptyset\ ;\ \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ je baza za } \mathcal{V}$$

Posmatrajmo proizvoljnu bazu $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ za $\mathbb{R}^5$. Ako stavimo

$$\mathcal{X}=span\underbrace{\{x_1,x_2\}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}},\quad \mathcal{Y}=span\underbrace{\{x_3,x_4,x_5\}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}}$$

tada imamo da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cap\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\emptyset$ (ZAŠTO?) ;
$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathbb{R}^5$

$$\overset{2}{\Rightarrow}\quad \mathbb{R}^5=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}.$$

\# Konstruisati primjer koji će pokazati da ako $\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ ali $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\neq\mathbf{0}$, tada postoji vektor $v\in\mathcal{V}$ koji se može prikazati na dva različita načina

$$v=x_1+y_1 \quad i \quad v=x_2+y_2$$

gdje $x_1,x_2\in\mathcal{X}$ i $y_1,y_2\in\mathcal{Y}$ ali $x_1\neq x_2$ i $y_1\neq y_2$.

Rj. Posmatrajmo prostor $\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$ sa bazom $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

i neka je $\mathcal{X}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{Y}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Tada primjetimo da je

$$x_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$$

$$y_1=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{Y}$$

$$x_2=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$$

$$y_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{Y}$$

i

$$x_1+y_1=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix},\quad x_2+y_2=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}$$

Isto tako mogli smo posmatrati i $\mathbb{R}^2$ i staviti

$$\mathcal{X}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\Big|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\},\quad \mathcal{Y}=\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2=\mathcal{X}+\mathcal{Y},\quad \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\neq\mathbf{0}$$

$$\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y-x\end{pmatrix}\quad i\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$$

(#) Neka su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{K}$, redom, podprostori $n\times n$ simetričnih i nakrivo-simetričnih matrica (prisjetimo se, za matricu A kažemo da je simetrična kadgod je $A=A^T$, a nakrivo-simetrična kadgod $A=-A^T$). Objasniti zašto je $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})=\mathcal{S}\oplus\mathcal{K}$. Šta je projekcija od $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ na $\mathcal{S}$ paralelno sa $\mathcal{K}$?

Uputa: Ako je A kvadratna matrica

(a) Pokazati da $A+A^T$ je simetrična a $A-A^T$ je nakrivo-simetrična.

(b) Dokazati da postoji jedan i samo jedan način da napišemo matricu A kao sumu simetrične i nakrivo-simetrične matrice.

Rj: Prvo pokažimo da je $A+A^T$ simetrična, a $A-A^T$ nakrivo simetrična matrica.

Neka je $S=A+A^T$ i $K=A-A^T$. Tada

$$S^T=(A+A^T)^T=A^T+A^{TT}=A^T+A=S$$

$$K^T=(A-A^T)^T=A^T-A^{TT}=A^T-A=-(A-A^T)=-K$$

Da li možemo matricu A napisati kao sumu simetrične i nakrivo-simetrične matrice. Primijetimo

$$S+K=(A+A^T)+(A-A^T)=2A$$

Prema tome $A=\dfrac{S+K}{2}=\dfrac{S}{2}+\dfrac{K}{2}=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$

tj. $A=\dfrac{S}{2}+\dfrac{K}{2}$ je jedna takva dekompozicija. Da bi pokazali da je jedinstvena, pretpostavimo da je

$A=X+Y$ gdje je $X=X^T$ i $Y=-Y^T$. Odavde slijedi $A^T=X^T+Y^T=X-Y \Rightarrow A+A^T=2X$

pa je $X=\dfrac{A+A^T}{2}=\dfrac{S}{2}$. Sličan argument pokazuje da je $Y=\dfrac{A-A^T}{2}=\dfrac{K}{2}$.

Znamo da

$\underline{V=X\oplus Y} \Leftrightarrow \underline{\forall v\in V\ \exists!\, x\in X, y\in Y \quad v=x+y \Leftrightarrow \begin{matrix}\mathcal{B}_X\cap\mathcal{B}_Y=\emptyset\\ \mathcal{B}_X\cup\mathcal{B}_Y \text{ baza za } V\end{matrix}}$ ... (*)

Pokazali smo da se svaka matrica $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ može jedinstveno napisati kao suma simetrične i nakrivo-simetrične matrice prema formuli

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$$

pa (*) garantuje da $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})=\mathcal{S}\oplus\mathcal{K}$. Prema definiciji, projekcija na $\mathcal{S}$ paralelno sa $\mathcal{K}$ je $\mathcal{S}$ komponenta od A - naime $\dfrac{A+A^T}{2}$. Za datu matricu, ovo je

$$\frac{A+A^T}{2}=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}.$$

Za neki vektorski prostor, neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ dva podprostora redom sa bazama $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

(a) Dokazati da $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$ akko $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ je linearno nezavisan skup.

(b) Da li nezavisnost od $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ povlači $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$?

(c) Ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup, da li to povlači da su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori? Zašto?

Rj.

(a) "$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$. Da bi pokazali da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisno, napišimo

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}_{\in \mathcal{X}} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j}_{\in \mathcal{Y}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{X} \;\; i \;\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{Y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \mathbf{0} \quad i \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$$

(zato što su i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisni)

"$\Leftarrow$" Obrnuto, ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan, tada $v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \quad v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ i $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$$

(zato što je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan)

$$\Rightarrow v = \mathbf{0}.$$

(b) NE. Npr. Neka je $\mathcal{X}$ xOy-ravan a neka je $\mathcal{Y}$ yOz ravan u $\mathbb{R}^3$ redom sa bazama $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{e_2, e_3\}$. Imamo da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ali $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \neq 0$.

(c) NE. Činjenica da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisno ne garantuje da je $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ čitav prostor npr. posmatrajmo dvije različite linije u $\mathbb{R}^3$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ i neka je P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$. Pokazati da P ima sljedeće osobine

(i) $I-P$ je komplementarni projektor - projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(ii) $im(P) = \{x \mid Px = x\}$ (skup "fiksnih tački" za P)

(iii) $im(P) = ker(I-P) = \mathcal{X}$ i

$im(I-P) = ker(P) = \mathcal{Y}$

Rj. Znamo da

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \forall v \in \mathcal{V}\ \exists! x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\quad v = x+y \iff \begin{array}{l} \mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset \\ \mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y} \text{ je baza za } \mathcal{V} \\ \text{gdje su } \mathcal{B}_\mathcal{X} \text{ i } \mathcal{B}_\mathcal{Y} \\ \text{redom baze za } \mathcal{X} \text{ i } \mathcal{Y} \end{array}$$

(i)

Neka je v proizvoljni vektor iz $\mathcal{V}$. Znamo da $\exists! x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x+y$. Primjetimo da $v = x+y = Pv + y \Rightarrow$

$\Rightarrow y = v - Pv = (I-P)v$. Drugim riječima

$\forall v \in \mathcal{V}\quad (I-P)v = y \in \mathcal{Y}$ (gdje je $v = x+y$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$)

(ii) Pokažimo da je $im(P) \subseteq \{x \mid Px = x\}$ i $\{x \mid Px = x\} \subseteq im(P)$

Izaberimo proizvoljno $x \in \{x \mid Px = x\} \Rightarrow Px = x \Rightarrow$

$x \in \{Px \mid x \in \mathcal{V}\} \Rightarrow x \in im(P) \Rightarrow \{x \mid Px = x\} \subseteq im(P)$

Sad izaberimo proizvoljno $x \in im(P) \Rightarrow x = Py$ za neko $y \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow Px = P^2 y = Py = x$ tj. $Px = x \Rightarrow x \in \{x \mid Px = x\} \Rightarrow im(P) \subseteq \{x \mid Px = x\}$

(iii) Iskoristit ćemo osobinu (ii) (koju smo upravo dokazali) zajedno sa definicijom projektora na $\mathcal{X}$

$x \in \mathcal{X} \iff Px = x \iff x \in im(P)$

Za vježbu pokazati da je $im(I-P) = ker(P) = \mathcal{Y}$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Pokazati da ako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ tada za svaki $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x+y$.

Rj.

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$, i u ovom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što obilježavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Prema definiciji $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{x + y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$. Kako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ to za svaki $v \in \mathcal{V}$ $\exists x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da

$$v = x + y.$$

Da bi pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da postoje dva načina da napišemo vektor $v \in \mathcal{V}$ kao "nešto iz $\mathcal{X}$ plus nešto iz $\mathcal{Y}$". Pa neka je

$$v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad \text{gdje } x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ i } y_1, y_2 \in \mathcal{Y}.$$

Kako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ to je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$, pa imamo

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathcal{X}} = \underbrace{y_2 - y_1}_{\in \mathcal{Y}} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 - x_2 \in \mathcal{X} \\ \text{i} \\ x_1 - x_2 \in \mathcal{Y} \end{array} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$$

tj. $x_1 - x_2 = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Prema tome $\forall v \in \mathcal{V}\ \exists! x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, koji, redom, imaju baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$. Pokazati da ako za svaki $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ taki da $v = x + y$ tada

i) $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$

ii) $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$.

Rj.

Kako $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$ imamo da je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Od ranije znamo da

ako $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generišu $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ redom tada $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$

Prema tome kako $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ generiše $\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Iz čega slijedi da $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ mora biti generator skup za $\mathcal{V}$. Da bi pokazali da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisno, neka je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$, i pretpostavimo da

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y_j .$$

Ovo je jedan način da izrazimo $\mathbf{0}$ kao "nešto iz $\mathcal{X}$ plus nešto iz $\mathcal{Y}$," dok je $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ drugi način. Prema tome, pretpostavka zadatka garantuje da $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$ i $\sum_{j=1}^{s} \beta_j y_j = 0$, pa prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ su linearno nezavisni. Prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je linearno nezavisno (a kako još generiše $\mathcal{V}$) to je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{V}$.

ZA VJEŽBU OBJASNITI ZAŠTO JE $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, koji imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$ tada

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} .$$

Rj. Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Od ranije znamo da za proizvoljna dva podprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim(\mathcal{Y}) - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

Ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{V}$ tada je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{V}$. Od ranije znamo da

$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ generiše $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$ generiše $\mathcal{Y}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$

Kako $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ generiše $\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$, a kako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup to je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ baza za } \mathcal{V} \\ \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ baza za } \mathcal{X}+\mathcal{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \dots (1)$$

a imamo i da je $\dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim(\mathcal{Y}) - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \Rightarrow \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 0$ ili ekvivalentno $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$ ...(2) $\quad$ (1) i (2) $\Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tako da se svaki vektor $v \in \mathcal{V}$ može napisati na jedinstven način u obliku $v = x + y$, gdje je $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$. Dat je operator P definisan sa $Pv = x$. Pokazati da

i) P je linearni operator

ii) P je jedinstven

iii) $P^2 = P$ (P je idempotent)

Napomena: <u>Jedinstveni linearni operator P definisan sa $Pv = x$ nazivamo projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.</u>

Rj.

i) Neka su $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ proizvoljna dva vektora. Kako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektori v_1 i v_2 se na jedinstven način mogu napisati u obliku $v_1 = x_1 + y_1$ i $v_2 = x_2 + y_2$ za neke $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$.

$$P(\alpha v_1 + v_2) = P(\alpha(x_1+y_1) + (x_2+y_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha P v_1 + P v_2$$

P je linearan operator

ii) Ako su P_1 i P_2 dva operatora koji zadovoljavaju dati uslov tada $P_1 v = P_2 v$ za $\forall v \in \mathcal{V}$ iz čega slijedi

$$P_1 = P_2$$

iii) Primjetimo da je $P^2 v = P(Pv) = Px = x = Pv$ za $\forall v \in \mathcal{V}$

$$\Rightarrow \quad P^2 = P$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{R}^n = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, gdje je $\dim \mathcal{X} = r$, i neka je P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$. Objasniti zašto postoje matrice $\mathbf{X}_{n\times r}$ i $A_{r\times n}$ takve da

$$P = \mathbf{X}A \quad i \quad A\mathbf{X} = I_{r\times r}$$

gdje je $\operatorname{rang}(\mathbf{X}) = \operatorname{rang}(A) = r$ (ovo zovemo potpuna-rang faktorizacija matrice P)

Rj.

<u>Projektori</u>

<u>Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$). Projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ je dat sa</u>

$$P = [\mathbf{X} \mid 0][\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^{-1} = [\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^{-1}$$

<u>gdje su kolone od $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$.</u>

Znamo da je projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ matrica $P = [\mathbf{X} \mid 0][\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^{-1}$ gdje su kolone od $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ redom. Ako je $[\mathbf{X}_{n\times r} \mid \mathbf{Y}]^{-1} = \begin{pmatrix} A_{r\times n} \\ \hline C \end{pmatrix}$ tada

$$P = [\mathbf{X} \mid 0][\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^{-1} = [\mathbf{X}_{n\times r} \mid 0]\begin{bmatrix} A_{r\times n} \\ \hline C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \\ \vdots \\ - a_r - \\ - c_{r+1} - \\ \vdots \\ - c_n - \end{bmatrix}_{n\times n} =$$

$$= \mathbf{X}_{n\times r} A_{r\times n}$$

Nesingularnost od $[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]$ i $\begin{pmatrix} A \\ \hline C \end{pmatrix}$ garantuju da $\mathbf{X}$

ima potpun kolona rang, a A ima potpun red rang, tj.

$$\text{rang}(A)=r \qquad \text{rang}(X)=r.$$

Pokažimo još da je $AX=I_{r\times r}$.

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [X \mid Y]^{-1}[X \mid Y] = \begin{pmatrix} A_{r\times n} \\ \hdashline C \end{pmatrix}[X_{n\times r} \mid Y] =$$

$$= \begin{pmatrix} AX & AY \\ CX & CY \end{pmatrix} \Rightarrow AX = I_{r\times r}.$$

(#) Za realan ili kompleksan vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i neka je F projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Dokazati da je $E+F$ projektor ako i samo ako $EF=FE=0$.

Rj.

Projektori i idempotenti

Linearni operator P na V je projektor ako i samo ako $P^2=P$.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je $EF=FE=0$. Tada

$$(E+F)^2=(E+F)(E+F)=E^2+\underbrace{EF}_{=0}+\underbrace{FE}_{=0}+F^2=E^2+F^2=E+F$$

Prema tome $E+F$ jest projektor.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $E+F$ projektor.

$$(E+F)^2=E+F \Rightarrow E^2+EF+FE+F^2=E+F \Rightarrow$$

$$E+EF+FE+F=E+F \Rightarrow EF+FE=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(EF+FE)=0 \quad i \quad (EF+FE)E=0$$

(projektor pomnožen sa 0 je 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E^2F+EFE=EFE+FE^2 \Rightarrow EF=FE$$

Kako je $EF+FE=0$ to je $EF=0=FE$.

Prema tome, $P=E+F$ je projektor akko $EF=FE=0$.

(#) Na osnovu uslova iz prethodnog zadatka (za realan (ili kompleksan) vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i F projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Znamo da je $E+F$ projektor ako i samo ako $EF=FE=0$) dokazati da

$$im(E+F) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \quad ; \quad ker(E+F) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 .$$

Rj.

Znamo da: Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ i P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ tada $im(P) = \{x \mid Px = x\}$.

Neka je $P=E+F$.

Prvo pokažimo da je $im(P) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. Izaberimo proizvoljan $z \in im(P)$. $\quad z \in im(P) \iff Pz = z$

Svaki vektor z za koji vrijedi $Pz=z$ napišimo u obliku $z = x_1 + y_1$ i $z = x_2 + y_2$ gdje su $x_i \in \mathcal{X}_i$ i $y_i \in \mathcal{Y}_i$. Tada $Ex_1 = x_1$, $Ey_1 = 0$, $Fx_2 = x_2$ i $Fy_2 = 0$, Sad imamo

$$z \in im(P) \Rightarrow Pz = z \Rightarrow (E+F)z = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E+F)(x_2+y_2) = x_2 + y_2 \Rightarrow Ez + \underbrace{Fz}_{=x_2} = x_2 + y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ez = y_2 \Rightarrow x_1 = y_2$$

$$z = x_1 + x_2 \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \Rightarrow im(P) \subseteq \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \quad \ldots (*)$$

Obrnuto, $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \subseteq im(P)$ zato što

$$z \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \Rightarrow z = x_1 + x_2 \text{ gdje je } x_1 \in \mathcal{X}_1 \text{ i } x_2 \in \mathcal{X}_2$$

$$\Rightarrow x_1 = Ex_1 \quad i \quad x_2 = Fx_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Fx_1 = FEx_1 = 0 \quad ; \quad Ex_2 = EFx_2 = 0$$

$$\Rightarrow P(z) = (E+F)(x_1+x_2) = x_1 + x_2 = z$$

$$\Rightarrow z \in im(P) \quad \ldots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow im(P) = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \quad \ldots (1)$

Da su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ disjunktni slijedi iz

$$z \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \Rightarrow Ez = z = Fz \Rightarrow z = \underbrace{EF}_{=0} z = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = 0 \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow im(P) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

Na kraju da bi pokazali da je $ker(P) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ pišemo: Izaberimo proizvoljno $z \in ker(P) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Pz = 0 \Rightarrow (E+F)z = 0 \Rightarrow Ez = -Fz$$

$$\Rightarrow E^2 z = -EFz \quad ; \quad FEz = -F^2 z$$

$$\Rightarrow Ez = -\underbrace{EF}_{=0} z \quad i \quad \underbrace{FE}_{=0} z = -Fz$$

$$\Rightarrow Ez = 0 \quad ; \quad 0 = Fz \Rightarrow z \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$$

tj. $ker(P) \subseteq \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$

Slično se pokaže da je $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \subseteq ker(P)$ (za vježbu)

Prema tome $ker(P) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$.

Zadaci za vežbu

1. Neka su P i Q projektori.

(a) Dokazati da $im(P)=im(Q)$ akko $PQ=Q$ i $QP=P$.

(b) Dokazati da $ker(P)=ker(Q)$ akko $PQ=P$ i $QP=Q$.

(c) Dokazati da ako $E_1, E_2, \dots, E_k$ su projektori istog ranga i ako $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ su skalari taki da $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ tada je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j$ projektor

2. Dokazati da $rang(P)=trag(P)$ za svaki projektor P definisan na $\mathbb{R}^n$.

3. Za realni (ili kompleksni) vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i neka je F projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Dokazati da ako je $EF=P=FE$, tada je P projektor na $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$.

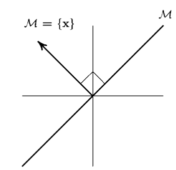
13. Ortogonalna dekompozicija

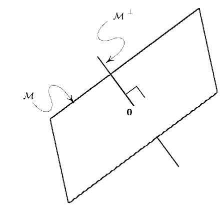
(13.01) Ortogonalni komplement

Za podskup M unitarnog prostora $\mathcal{V}$, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ (čitaj "M nor") od $\mathcal{M}$ je definisan kao skup svih vektora iz $\mathcal{V}$ koji su ortogonalni na svaki vektor iz $\mathcal{M}$. To jest

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x \rangle = 0 \text{ za svaki } m \in \mathcal{M}\}.$$

◇





(13.02) Ortogonalno komplementarni podprostor

Ako je $\mathcal{M}$ podprostor konačno dimenzionalnog unitarnog podprostora $\mathcal{V}$, tada je

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

Štaviše, ako je $\mathcal{N}$ podprostor takav da $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ (svaki vektor u $\mathcal{N}$ je ortogonalan na svaki vektor u $\mathcal{M}$), tada

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}.$$

◇

(13.03) Nor operator

Ako je $\mathcal{M}$ podprostor konačno dimenzionalnog unitarnog podprostora dimenzije n, tada su sljedeće tvrdnje tačne

- $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = n - dim(\mathcal{M})$.
- $\mathcal{M}^{\perp^{\perp}} = \mathcal{M}$ ◇

(13.03) Teorema ortogonalne dekompozicije

Za svaku matricu $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$im(A)^{\perp} = ker(A^{\top}) \quad \text{i} \quad ker(A)^{\perp} = im(A^{\top}).$$

Ako iskoristimo prvu osobinu iz 13.02 ovo znači da svaka matrica $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ pravi ortogonalnu dekompoziciju od $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ u smislu da

$$\mathbb{R}^m = im(A) \oplus im(A)^{\perp} = im(A) \oplus ker(A^{\top}),$$

i

$$\mathbb{R}^n = ker(A) \oplus ker(A)^{\perp} = ker(A) \oplus im(A^{\top}),$$

◇

(13.04) URV faktorizacija

Za svaku matricu $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ranga r postoje ortogonalne matrice $U_{m \times m}$ i $V_{n \times n}$ i nesingularna matrica $C_{r \times r}$ takve da

$$A = URV^{\top} = U \begin{pmatrix} C_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} V^{\top}.$$

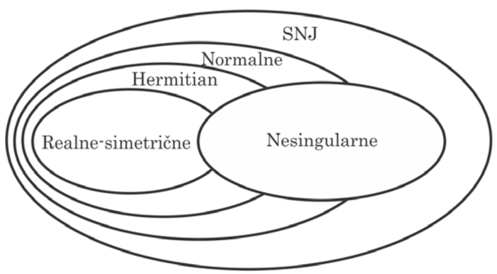
- Prvih r kolona u U čine ortonormiranu bazu za $im(A)$.
- Zadnjih $m - r$ kolona u U čine ortonormiranu bazu za $ker(A^\top)$.
- Prvih r kolona u V su ortonormirana baza za $im(A^\top)$.
- Zadnjih $n - r$ kolona u V su ortonormiranu bazu za $ker(A)$.

Svaka različita familija ortonormiranih baza za četri fundamentalna podprostora od A proizvodi različitu URV faktorizaciju od A. U kompleksnom slučaju, $(\star)^\top$ mjenjamo sa $(\star)^*$ i "ortogonalno" mijenjamo sa "unitarno". ⋄

(13.05) Slika normalna na jezgro
Za $rang(A_{n\times n}) = r$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- $im(A) \perp ker(A)$,
- $im(A) = im(A^\top)$,
- $ker(A) = ker(A^\top)$,
- $A = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^\top$

gdje je U ortogonalna a C nesingularna matrica. Ovakve matrice ćemo zvati <u>*SNJ matrice*</u> skraćenica od "slika normalna na jezgro". Neki autori ih nazivaju rang-simetrične ili EP ili RPN matrice. Nesingularne matrice su trivijalne SNJ matrice zato što je jezgro nula. U kompleksnom slučaju, $(\star)^\top$ mjenjamo sa $(\star)^*$ i "ortogonalno" mijenjamo sa "unitarno". ⋄



Provjeriti teoremu ortogonalne dekompozicije za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rj: Prisjetimo se

<u>Teorema ortogonalne dekompozicije</u>

<u>Za svaku matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$</u>

$$im(A)^\perp = ker(A^T) \quad i \quad ker(A)^\perp = im(A^T)$$

Kako za svaki podprostor $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^k$ vrijedi $\mathbb{R}^k = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, to znači da svaka matrica $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ proizvodi ortogonalnu dekompoziciju od $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ u smislu da

$$\mathbb{R}^m = im(A) \oplus im(A)^\perp = im(A) \oplus ker(A^T),$$

i

$$\mathbb{R}^n = ker(A) \oplus ker(A)^\perp = ker(A) \oplus im(A^T).$$

Prvo trebamo pronaći baze za četri fundamentalna podprostora $ker(A)$, $im(A)$, $ker(A^T)$, $im(A^T)$.
Prisjetimo se

- osnovne kolone iz A formiraju bazu za $im(A)$
- nenula redovi od U formiraju bazu za $im(A^T)$
- linearno nezavisni vektori iz općeg rješenja sistema $Ax=0$ formiraju bazu za $ker(A)$.
- zadnjih $m-r$ redova iz P formira bazu za $ker(A^T)$

gdje je P nesingularna matrica takva da $PA=U$, a matrica U je u red ešelon obliku.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&-1&0\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\underset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&1&1\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\underset{III_v+II_v}{\sim}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{II_v+I_v\cdot 2}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{I_v\cdot(-1)\\ II_v\cdot(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{I_v-II_v}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=E_A$$

$$im(A)=span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\},\quad im(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$ker(A)=\{x\mid Ax=0\}$$

$$\bar{A}=[A\mid \mathbf{0}]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\-1&-1&0&0\\-2&-1&-1&0\end{array}\right]\underset{III_v+I_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\underset{I_v+II_v}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\underset{II_v+I_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow rang\,A=rang\,\bar{A}<3$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad x_3=t,\quad \begin{matrix}-x_2+x_3=0\\x_1\quad+x_3=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_2=t\\x_1=-t\end{matrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}t,\quad t\in\mathbb{R}\qquad ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ostalo je još da odredimo bazu za $ker(A^T)$.

$$\Big(\underbrace{\begin{matrix}2&1&1\\-1&-1&0\\-2&-1&-1\end{matrix}}_{=A}\Big|\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{=I}\Big)\underset{III_v+I_v}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\-1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\end{array}\right)\underset{I_v+II_v}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\-1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{II_v+I_v}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\end{array}\right)\underset{II_v\cdot(-1)}{\sim}\Big(\underbrace{\begin{matrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{matrix}}_{=E_A}\Big|\underbrace{\begin{matrix}1&1&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{matrix}}_{=P}\Big)\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Prema tome $ker(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Dobili smo da je

$$im(A)=span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$im(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$ker(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$(2\ \ -1\ \ -2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2-2=0,\qquad(1\ \ -1\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1-1=0$$

Kako je svaki vektor u bazi za $im(A)$ ortogonalan na svaki vektor u bazi za $ker(A^T)$, slijedi da je $im(A)\perp ker(A^T)$. Ista logika također objašnjava zašto $ker(A)\perp im(A^T)$. Primjetimo da je $im(A)$ ravan kroz koordinatni početak u $\mathbb{R}^3$, a $ker(A^T)$ je prava kroz koordinatni početak okomita na ovu ravan, pa iz zakona paralelograma slijedi

$$im(A)\oplus ker(A^T)=\mathbb{R}^3$$

Slično, $ker(A)$ je prava kroz koordinatni početak normalna na ravan koja je definisana sa $im(A^T)$, pa je

$$ker(A)\oplus im(A^T)=\mathbb{R}^3.$$

Za unitarni prostor $\mathcal{V}$, šta je $\mathcal{V}^\perp$? šta je $\mathbf{0}^\perp$?

Rj. Prema definiciji $\underline{\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \mathcal{M}\}}$

$$\mathcal{V}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \mathcal{V}\}$$

drugim riječima tražimo vektor iz $\mathcal{V}$ koji je okomit na sve vektore iz $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V}^\perp = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \{\mathbf{0}\}\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{0}^\perp = \mathcal{V}.$$

Pronaći bazu za ortogonalni komplement od

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\1\\6\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. Znamo da: $\underline{\text{Za svaku matricu } A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})}$

$$\underline{im(A)^\perp = ker(A^T) \quad i \quad ker(A)^\perp = im(A^T)}$$

Ako je $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\\0 & 1\\3 & 6\end{pmatrix}$ tada je $im(A) = \mathcal{M}$.

$im(A^T)$ je $ker(A^T)$

Znamo da $\underline{\text{zadnjih } m-r \text{ redova iz } P \text{ formira bazu za } ker(A^T)}$ gdje je P nesingularna matrica takva da $PA = U$, a matrica U je u red ešelon obliku.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{A}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{I}} \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{IV_v + I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v + I_v\cdot(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{I_v + III_v\cdot(-2)}{\overset{II_v + III_v}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \overset{III_v - II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\quad}_{E_A} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{P}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ traženo rješenje

Za svaki unitarni prostor V, dokazati da ako je $M \leq V$, tada je $M^\perp$ podprostor od V.

Rj. Prema definiciji $M^\perp = \{x \in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in M\}$.

Trebamo provjeriti da li je $M^\perp$ zatvoreno u odnosu na vektorsko sabiranje i skalarno množenje.

Ako je $x, y \in M^\perp \Rightarrow \langle m, x\rangle = 0 = \langle m, y\rangle$ za $\forall m \in M$

$\Rightarrow \langle m, x+y\rangle = 0 \quad \forall m \in M \Rightarrow x+y \in M^\perp$.

Slično, za $\forall \alpha$ (α - skalar) $\langle m, \alpha x\rangle = \alpha\langle m, x\rangle = 0 \quad \forall m$

$\Rightarrow \alpha x \in M^\perp$.

$M^\perp$ jest podprostor od V

Ako su M i N podprostori od n-dimenzionalnog unitarnog prostora, dokazati da su sljedeće tvrdnje tačne.

(a) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$

(b) $(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$

(c) $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$

Rj. a) Neka je $M \subseteq N$

Izaberimo proizvoljno $x \in N^\perp$. Tada

$$x \perp N \supseteq M \Rightarrow x \perp M \Rightarrow x \in M^\perp$$

Tj. $N^\perp \subseteq M^\perp$.

b) Jednostavno primjetimo da je

$$x \in (M+N)^\perp \Leftrightarrow x \perp (M+N) = \{m+n \mid m \in M \text{ i } n \in N\}$$
$$\Leftrightarrow x \perp M \text{ i } x \perp N$$
$$\Leftrightarrow x \in (M^\perp \cap N^\perp)$$

c) Znamo da je $M^{\perp\perp} = M$.

Sad ako iskoristimo dio (b) imamo

$$(M^\perp + N^\perp)^\perp = M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = M \cap N$$

$$\Rightarrow (M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$$

Izračunati URV faktorizaciju matrice

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4 & -2\\ 2 & -2 & 2 & 1\\ -4 & 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

koristeći elementarne red operacije zajedno sa Gram-Schmidt-ovim procesom ortogonalizacije.

Rj.: URV faktorizacija

Za svaku matricu $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ ranga r, postoji ortogonalna matrica $U_{m\times m}$ i $V_{n\times n}$ i nesingularna matrica $C_{r\times r}$ takva da

$$A=URV^T=U\begin{pmatrix}C_{r\times r} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}V^T$$

- prvih r kolona u U čine ortonormiranu bazu za $im(A)$
- zadnjih $m-r$ kolona od U su ortonormirana baza za $ker(A^T)$
- prvih r kolona u V su ortonormirana baza za $im(A^T)$
- zadnjih $n-r$ kolona od V je ortonormirana baza za $ker(A)$.

Izračunajmo E_A

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4 & -2\\ 2 & -2 & 2 & 1\\ -4 & 1 & -4 & -2\end{pmatrix}\underset{III_v:(-2)}{\overset{I_v:(-4)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 2 & -2 & 2 & 1\\ 2 & -1/2 & 2 & 1\end{pmatrix}\underset{III_v+II_v\cdot(-1)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 3/2 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{\substack{I_v+II_v\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\\ II_v:(-3)}}{\overset{III_v+II_v\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=E_A$$

$$\Rightarrow\quad im(A)=\left\{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\},\quad im(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$Ax=0 \Leftrightarrow E_Ax=0$$

$$\begin{aligned}x_1++x_3+\tfrac{1}{2}x_4&=0\\ x_2&=0\end{aligned}$$

$x_3=s,\ x_4=t$

$x_1=-s-\frac{1}{2}t$

$x_2=0$

$$\Rightarrow\quad x=\begin{pmatrix}-s-\frac{1}{2}t\\0\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}t$$

$$ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}-4 & -2 & -4 & -2\\ 2 & -2 & 2 & 1\\ -4 & 1 & -4 & -2\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I}\right)\underset{\substack{II_v:2\\ I_v:(-4)}}{\overset{III_v-I_v}{\sim}}\left(\begin{matrix}1 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 1 & -1 & 1 & 1/2\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}-1/4 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right)$$

$$\overset{II_v-I_v}{\sim}\left(\begin{matrix}1 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & -3/2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}-1/4 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right)\overset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim}\left(\begin{matrix}1 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & -3/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}-1/4 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 1\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow\quad ker(A^T)=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Sad nije teško primijeniti Gram-Schmidtov proces i dobiti ortonormirane baze za četri fundamentalna podprostora

$$\mathcal{B}_{im(A)}=\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{B}_{ker(A^T)}=\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{B}_{im(A^T)}=\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{B}_{ker(A)}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

(za vježbu ovaj dio detaljno raspisati)

Sad matrice U i V nije teško izračunati

$$U=\left(\mathcal{B}_{im(A)}\cup\mathcal{B}_{ker(A^T)}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

i

$$V=\left(\mathcal{B}_{im(A^T)}\cup\mathcal{B}_{ker(A)}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & -3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0 & 4/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Direktnim množenjem dobijemo

$$R=U^TAV=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Objasniti zašto je slika plus jezgro teorema:

$$\dim im(A)+\dim ker(A)=n \quad \text{za sve } m\times n \text{ matrice}$$

posljedica teoreme ortogonalne dekompozicije.

Rj.

Teorema ortogonalne dekompozicije

Za svaku matricu $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$im(A)^{\perp}=ker(A^T)\quad;\quad ker(A)^{\perp}=im(A^T)$$

i vrijedi

$$\mathbb{R}^m=im(A)\oplus ker(A^T)\quad;\quad \mathbb{R}^n=ker(A)\oplus im(A^T)$$

Od ranije znamo da

$$rang(A)=r \iff \dim im(A)=r$$

Sad primjetimo

$$\dim im(A^T)=rang(A^T)=rang(A)=\dim im(A)$$

$$n=\dim\mathbb{R}^n=\dim\left(ker(A)\oplus im(A^T)\right)=$$

$$=\dim ker(A)+\dim im(A^T)=$$

$$=\dim ker(A)+\dim im(A)$$

$$\Rightarrow\quad n=\dim im(A)+\dim ker(A)$$

q.e.d.

(#) Ako je $\mathcal{M}$ podprostor konačno-dimenzionalnog unitarnog prostora V, tada $V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Dokazati.

Rj.

Prvo pokažimo da je $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = 0$.

Izaberimo proizvoljno $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp \Rightarrow x \in \mathcal{M}$ i $x \in \mathcal{M}^\perp$

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$ (x je ortogonalan sam na sebe)

$\Rightarrow x = 0$ Kako je x proizvoljan to $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = 0$

Sad pokažimo da je $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = V$.

Neka su $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp}$ ortonormirane baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ redom. Kako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ disjunktni, $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp}$ je ortonormirana baza za neki podprostor $\mathcal{S} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \subseteq V$. Ako je $\mathcal{S} \neq V$ znamo da $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp}$ možemo proširiti do baze za V. Sad ako iskoristimo Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije možemo formirati ortonormiran skup vektora $\mathcal{E}$ takav da je $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp} \cup \mathcal{E}$ ortonormirana baza za V. Sad imamo

$\mathcal{E} \perp \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \mathcal{E} \perp \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}^\perp \Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathrm{span}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp})$

(svaki vektor iz $\mathcal{E}$ je ortogonalan na svaki vektor iz $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$)

#kontradikcija (zato što je $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{M}^\perp} \cup \mathcal{E}$ linearno nezavisan skup)

Prema tome $\mathcal{E}$ je prazan skup $\Rightarrow V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

q.e.d.

(#) Ako je $\mathcal{N}$ podprostor takav da $V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ (svaki vektor u $\mathcal{N}$ je ortogonalan na svaki vektor u $\mathcal{M}$) tada $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$. Dokazati.

Rj.

Kako je $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ to je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^\perp$.

Znamo da, <u>ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora V, tada $\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$.</u> ...(*)

Znamo da

$$\left.\begin{array}{l} V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \overset{(*)}{\Rightarrow} \dim(V) = \dim(\mathcal{M}) + \dim(\mathcal{M}^\perp) \\ V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \overset{(*)}{\Rightarrow} \dim(V) = \dim(\mathcal{M}) + \dim(\mathcal{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{M}^\perp$

Kako je

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^\perp$ i $\dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{M}^\perp \Rightarrow \mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$.

q.e.d.

Neka je $U_{m\times m} = (U_1 \mid U_2)$ particionisana ortogonalna matrica. Objasniti zašto $im(U_1)$ i $im(U_2)$ moraju biti ortogonalni komplementi.

Rj.
Znamo da

$$\underline{\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\ v = x + y} \iff \underline{\begin{matrix} \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset \\ \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ baza za } \mathcal{V} \end{matrix}} \quad \ldots (*)$$

Kako su kolone matrice U međusobno ortogonalne to su kolone od U_1 baza za $im(U_1)$, a kolone od U_2 baza za $im(U_2)$ pa prema $(*)$ imamo

$$\mathbb{R}^m = im(U_1) \oplus im(U_2)$$

i primjetimo da je $im(U_1) \perp im(U_2)$.

Znamo da, ako je $\mathcal{N}$ podprostor takav da $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ tada $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}$. $\ldots (**)$

Sad na osnovu $(**)$ primjetimo da je $im(U_2) = im(U_1)^{\perp}$ tj. $im(U_1)$ i $im(U_2)$ su ortogonalni komplementi.

Ako je $\mathcal{M}$ podprostor od n-dimenzionalnog unitarnog prostora $\mathcal{V}$, tada su sljedeće tvrdnje tačne.

(i) $\dim \mathcal{M}^{\perp} = n - \dim \mathcal{M}$;

(ii) $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$. Dokazati.

Rj.
(i) Znamo da
<u>Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada</u>

$$\underline{\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})}.$$

$\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ su komplementarni podprostori $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{M}^{\perp}} = \emptyset \text{ i } \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{M}^{\perp}} \text{ je baza za } \mathcal{V}$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{M}) + \dim(\mathcal{M}^{\perp})$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{M}^{\perp}) = n - \dim(\mathcal{M}) \quad \text{q.e.d.}$$

(ii) Prvo pokažimo da je $\mathcal{M}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$. Ako je $x \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$ proizvoljno tada $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ povlači $x = m + n$, gdje $m \in \mathcal{M}$ i $n \in \mathcal{M}^{\perp}$, pa

$$0 = \langle n, x \rangle = \langle n, m+n \rangle = \langle n, m \rangle + \langle n, n \rangle = \langle n, n \rangle \Rightarrow n = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in \mathcal{M}$, pa prema tome $\mathcal{M}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$.
Na osnovu (i) znamo da $\dim \mathcal{M}^{\perp} = n - \dim \mathcal{M}$ i $\dim \mathcal{M}^{\perp\perp} = n - \dim \mathcal{M}^{\perp}$ pa je $\dim \mathcal{M}^{\perp\perp} = \dim \mathcal{M}$, a odavde vidimo da je

$$\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$$

q.e.d.

(#) Za svaku matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ pokazati da je

$$im(A)^\perp = ker(A^T) \quad i \quad ker(A)^\perp = im(A^T)$$

Rj.

Posmatrajmo prostor $im(A)^\perp$. Za $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$x \in im(A)^\perp \iff \langle \underbrace{Ay}_{\in im(A)}, \underbrace{x}_{\in im(A)^\perp} \rangle = 0 \iff (Ay)^T x = 0$$

$$\iff y^T A^T x = 0 \iff \langle y, A^T x \rangle = 0$$

Prisjetimo se

Ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za $\forall x \in \mathcal{V}$ tada $y = 0$.

Zašto?

$$\langle x, y \rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathcal{V} \implies \langle y, y \rangle = 0 \implies y = 0$$

$$\iff A^T x = 0 \iff x \in ker(A^T)$$

Prema tome $im(A)^\perp = ker(A^T)$,

q.e.d.

Ako u dobijenoj jednakosti zamjenimo A sa A^T dobićemo

$$im(A^T)^\perp = ker(A) \quad /^\perp$$

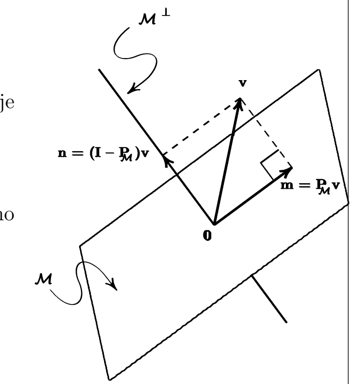
$$ker(A)^\perp = im(A^T)$$

q.e.d.

Ortogonalne projekcije

Ortogonalna projekcija Za $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, neka je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$, gdje je $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}$ i $\boldsymbol{n} \in \mathcal{M}^\perp$.

- Vektor $\boldsymbol{m}$ zovemo *ortogonalna projekcija* od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{M}$.
- Projektor $P_{\mathcal{M}}$ na $\mathcal{M}$ paralelno sa $\mathcal{M}^\perp$ zovemo *ortogonalni projektor* na $\mathcal{M}$.
- $P_{\mathcal{M}}$ je jedinstveni linearni operator takav da $P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}$.



1. Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2,

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(*a*) Provjeriti da li je sa $\langle p, q\rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$ definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.

(*b*) Za podprostor $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.

(*c*) Odredite ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2 + x + 2$ na $\mathcal{L}$.

Konstrukcija ortogonalnog projektora Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ redom baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

- $P_{\mathcal{M}} = M(M^\top M)^{-1}M^\top$ i $P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^\top N)^{-1}N^\top$.

Ako M i N sadrže ortonormirane baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$, tada

- $P_{\mathcal{M}} = MM^\top$ i $P_{\mathcal{M}^\perp} = NN^\perp$
- $P_{\mathcal{M}} = U\begin{pmatrix} I_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}U^\top$, gdje je $U = (M|N)$.
- $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$ u svim slučajevima.

2. Pronaći ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M} = \text{span}\{u\}$, pa onda odrediti projekciju od b na $\mathcal{M}^\perp$, gdje je $b = (4, 8)^\top$ i $u = (3, 1)^\top$.

3. Za matricu $A \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ takvu da je $\text{rang}(A) = r$, opisati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora od A.

4. Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Izračunati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora pridruženih matrici A.

(*b*) Odrediti tačku u $\ker(A)^\perp$ koja je najbliža tački b.

5. Neka je $u \in \mathbb{R}^n$ nenula vektor i posmatrajmo liniju $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{u\}$. Konstruisati ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, i onda odrediti ortogonalnu projekciju proizvoljnog vektora $x \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{L}$.

Ortogonalni projektori Pretpostavimo da je $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ projektor, tj. $P^2 = P$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne tvrdnji: P je ortogonalni projektor.

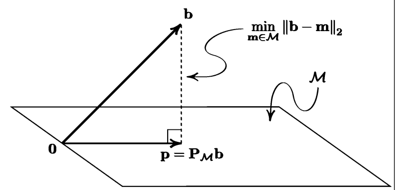
- $im(P) \perp ker(P)$.
- $P^\top = P$ (tj., ortogonalni projektor $\Leftrightarrow P^2 = P = P^\top$).
- $\|P\|_2 = 1$ za matričnu 2-normu.

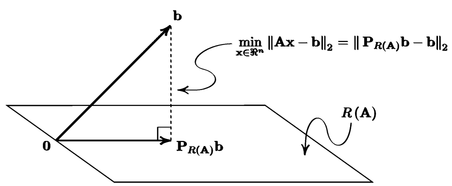
(Prisjetimo se matrična 2-norma, matrice A, je definisana $\|A\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|A\boldsymbol{x}\|_2$).

Teorema o najbližoj tački Neka je $\mathcal{M}$ podprostor unitarnog prostora $\mathcal{V}$, i neka je $\boldsymbol{b}$ vektor u $\mathcal{V}$. Jedinstveni vektor u $\mathcal{M}$ koji je najbliži vektoru $\boldsymbol{b}$ je $\boldsymbol{p} = P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}$, ortogonalna projekcija od $\boldsymbol{b}$ na $\mathcal{M}$. Drugim riječima,

$$\min_{m\in\mathcal{M}} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}\|_2 = udaljenost(\boldsymbol{b}, \mathcal{M}).$$

Ovo se zove *ortogonalna udaljenost* između $\boldsymbol{b}$ i $\mathcal{M}$.





6. Kao što znamo od ranije, tijelo u $\mathbb{R}^m$ sa paralelnim suprotnim stranama, gdje su susjedne strane definisane sa vektorima koji formiraju linearno nezavisan skup $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ se zove n-dimenzionalni paralelopiped. Dvodimenzionalni paralelopiped je paralelogram, dok je trodimenzionalni paralelopiped "nahereni" kvadar. Odrediti zapreminu dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog paralelopipeda, i onda napraviti prirodno proširenje za iznalaženje zapremine n-dimenzionalnog paralelopipeda.

Riješenje problema najmanjih kvadrata Svaka od sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne tvrdnji: $\widehat{\boldsymbol{x}}$ je riješenje problema najmanjih kvadrata za moguć slučaj nesingularnosti linearnog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

- $\|A\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$.
- $A\widehat{\boldsymbol{x}} = P_{im(A)}\boldsymbol{b}$.
- $A^\top A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^\top\boldsymbol{b}$ $\quad$ ($A^*A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^*\boldsymbol{b}$ kada je $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$).

Oprez! Ovo su vrijedne teoriske karakterizacije, ali ni jedna nije preporučljiva kada je u pitanju račun sa pokretnim zarezom. Numerička računanja su tema nekog drugog teksta.

\# Pronaći ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{u\}$, pa onda odrediti ortogonalnu projekciju od b na $\mathcal{M}^\perp$, gdje je $b = (4\ 8)^T$ i $u = (3\ 1)^T$.

Rj:

Konstrukcija ortogonalnog projektora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ redom.

Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad i \quad P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^TN)^{-1}N^T$$

Isto tako vrijedi $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$.

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{u\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ kolone matrice M su baza za $\mathcal{M}$

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T = u\underbrace{(u^Tu)^{-1}}_{\in\mathbb{R}}u^T = \frac{uu^T}{u^Tu} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(3\ 1)}{(3\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{M}^\perp} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

pa je $P_{\mathcal{M}^\perp} b = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ i $P_{\mathcal{M}} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ tj. ortogonalna projekcija od $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ na $\mathcal{M}$ je $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ortogonalna projekcija od b na $\mathcal{M}^\perp$ je $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Za matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ takvu da je $rang(A)=r$, opisati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora od A.

Rj. Neka su $B_{m\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ matrice čije su kolone baze za $im(A)$ i $ker(A)$, redom, npr. B može sadržavati osnovne kolone u A.

Prisjetimo se teoreme ortogonalne dekompozicije

Teorema ortogonalne dekompozicije

Za svaku matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$im(A)^{\perp} = ker(A^T) \quad ; \quad ker(A)^{\perp} = im(A^T).$$

Sad ako iskoristimo teoremu

Konstrukcije ortogonalnih operatora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ redom.

Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^{\perp}$ su

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad ; \quad P_{\mathcal{M}^{\perp}} = N(N^TN)^{-1}N^T$$

Isto tako, uvijek vrijedi $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = I - P_{\mathcal{M}}$.

možemo zaključiti da je

$$P_{im(A)} = B(B^TB)^{-1}B^T,$$
$$P_{ker(A)} = N(N^TN)^{-1}N^T,$$

$$P_{im(A^T)} = P_{ker(A)^{\perp}} = I - P_{ker(A)}, \quad P_{ker(A^T)} = P_{im(A)^{\perp}} = I - P_{im(A)}.$$

Primjetimo da ako je $rang(A)=n$, tada su sve kolone u A osnovne pa vrijedi $P_{im(A)} = A(A^TA)^{-1}A^T$!

Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Izračunati ortogonalne projektore na svaki od četri fundamentalna podprostora pridruženih matrici A.

(b) Odrediti tačku u $ker(A)^{\perp}$ koja je najbliža tački b.

Rj. (a)

Prema prethodnom zadatku, koji je direktna posljedica teoreme ortogonalne dekompozicije

$$im(A)^{\perp} = ker(A^T) \quad ; \quad ker(A)^{\perp} = im(A^T)$$

i teoreme za konstrukciju ortogonalnih operatora

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T \quad ; \quad P_{\mathcal{M}^{\perp}} = N(N^TN)^{-1}N^T$$

$$P_{\mathcal{M}^{\perp}} = I - P_{\mathcal{M}}$$

imamo da je $P_{im(A)} = B(B^TB)^{-1}B^T$, $P_{ker(A)} = N(N^TN)^{-1}N^T$,

$P_{im(A^T)} = I - P_{ker(A)}$; $P_{ker(A^T)} = I - P_{im(A)}$, gdje su B i N matrice čije su kolone, redom, baze za i $ker(A)$.

Pa pronađimo baze za $im(A)$ i $ker(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v\cdot 2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \Rightarrow im(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow E_Ax = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \; s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ker(A) = span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad N^TN=(-2\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=5$$

$$B^TB=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\2&1\end{pmatrix}\qquad (N^TN)^{-1}=\frac{1}{5}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}6&2&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\underset{II_v:2}{\overset{I_v:6}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&0\\1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\overset{II_v-I_v}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/3&1/6&0\\0&1/6&-1/6&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\overset{II_v\cdot 6}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/3&1/6&0\\0&1&-1&3\end{array}\right)\overset{I_v-II_v\cdot\frac{1}{3}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1\\0&1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}$$

$$(B^TB)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$P_{im(A)}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1\\0&1\\1/2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\Rightarrow P_{ker(A^T)}=I-P_{im(A)}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&0&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$NN^T=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}(-2\ 1\ 0)=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_{ker(A)}=N(N^TN)^{-1}\cdot N^T=\begin{pmatrix}4/5&-2/5&0\\-2/5&1/5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad P_{im(A^T)}=I-P_{ker(A)}=\begin{pmatrix}1/5&2/5&0\\2/5&4/5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(#) Neka je $u\in\mathbb{R}^n$ nenula vektor i posmatrajmo liniju $\mathcal{L}=\text{span}\{u\}$. Konstruisati ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, i onda odrediti ortogonalnu projekciju proizvoljnog vektora $x\in\mathbb{R}^n$ na $\mathcal{L}$.

Rj. Konstrukcija ortogonalnog projektora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od M i N baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$, redom. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

$$P_{\mathcal{M}}=M(M^TM)^{-1}M^T\quad i\quad P_{\mathcal{M}^\perp}=N(N^TN)^{-1}N^T\qquad\ldots(*)$$

Sam vektor u je baza za $\mathcal{L}$, pa ako sa matricom M označimo $M=\left[\,u\,\right]_{n\times 1}$ prema $(*)$ imamo da je

$$P_{\mathcal{L}}=u\underbrace{(u^Tu)}_{\in\mathbb{R}}{}^{-1}u^T=\frac{uu^T}{u^Tu}\qquad \boxed{u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}}$$

ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$. Ortogonalna projekcija proizvoljnog vektora x na $\mathcal{L}$ je data sa

$$P_{\mathcal{L}}x=\frac{uu^T}{u^Tu}x=\left(\frac{u^Tx}{u^Tu}\right)u$$

zato što je

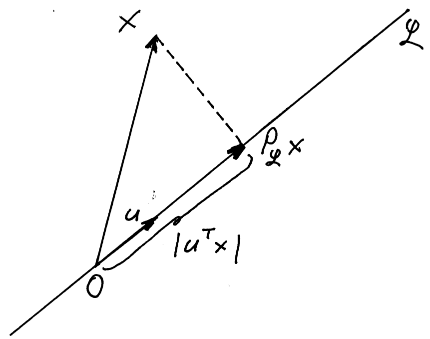
$$(uu^T)x=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}(u_1\ u_2\ldots u_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}u_1u_1&u_1u_2&\ldots&u_1u_n\\u_2u_1&u_2u_2&\ldots&u_2u_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\u_nu_1&u_nu_1&\ldots&u_nu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1u_1x_1+u_1u_2x_2+\ldots+u_1u_nx_n\\u_2u_1x_1+u_2u_2x_2+\ldots+u_2u_nx_n\\\vdots\\u_nu_1x_1+u_nu_1x_2+\ldots+u_nu_nx_n\end{pmatrix}=(u^Tx)u.$$

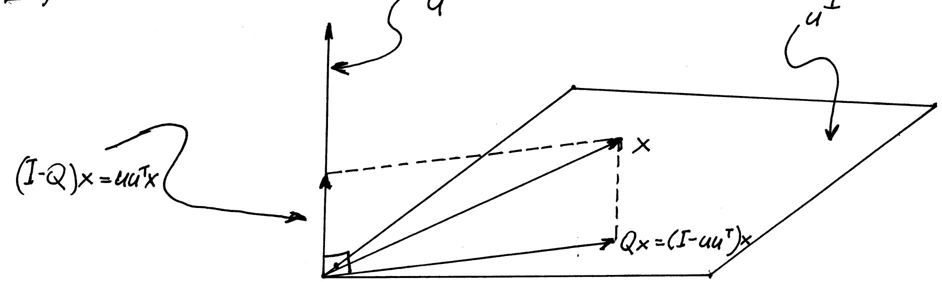
Napomena: Ako je $\|u\|_2 = 1$, tada $P_{\mathcal{L}} = uu^T$, pa je

$P_{\mathcal{L}} x = uu^T x = (u^T x) u$ i $\|P_{\mathcal{L}} x\|_2 = |u^T x| \, \|u\|_2 = |u^T x|$.

Ovo povlači geometrisko tumačenje za veličine u standardnom unutrašnjem proizvodu. Kaže da, ako je u vektor jedinične dužine u $\mathcal{L}$, tada, kao što je prikazano na slici, $|u^T x|$ je dužina

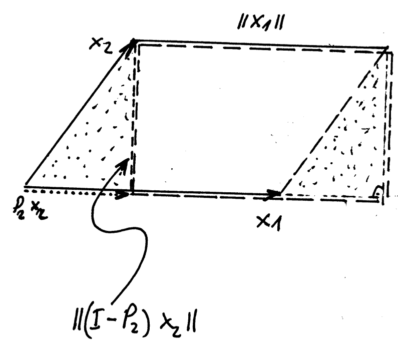


ortogonalne projekcije od x na liniju generisanu sa u. Na kraju, primjetimo da kako je $P_{\mathcal{L}} = uu^T$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{L}$, moramo imati da je $P_{\mathcal{L}^\perp} = I - uu^T$ ortogonalni projektor na $\mathcal{L}^\perp$. $Q = I - uu^T$ se zove <u>elementarni ortogonalni projektor</u>



(#) Kao što znamo od ranije, tijelo u $\mathbb{R}^m$ sa paralelnim suprotnim stranama, gdje su susjedne strane definisane sa vektorima koji formiraju linearno nezavisan skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se zove n-dimenzionalni paralelopiped. Dvodimenzionalni paralelopiped je paralelogram, dok je trodimenzionalni paralelopiped "nahereni" kvadar. Odrediti zapreminu dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog paralelopipeda, i onda napraviti prirodno proširenje za iznalaženje zapremine n-dimenzionalnog paralelopipeda.

Rj. Posmatrajmo dvodimenzionalni slučaj.



U dvodimenzionalnom slučaju zapremina je u stvari površina i sa slike ni teško vidjeti (podudarnost SSU) da su "tačkasti" trouglovi podudarni (a time su im površine podudarne).

Širina isprekidanog pravougaonika je $\|x_1\|_2$. Kolika je visina isprekidanog pravougaonika.

Ako sa P_2 označimo ortogonalnu projekciju na prostor (liniju) generisanu sa x_1 tada je $P_2 x_2$ tačkasti vektor sa slike.

Znamo da:

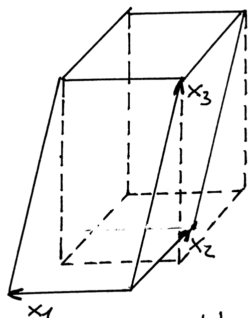
<u>Ako je $P_{\mathcal{M}}$ ortogonalni projektor na $\mathcal{M}$ tada je</u>

<u>$P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$ ortogonalni projektor na $\mathcal{M}^\perp$.</u>

Vidimo da će $I-P_2$ biti ortogonalni projektor na $\text{span}\{x_1\}^\perp$, drugim riječima visina isprekidanog pravougaonika je $\|(I-P_2)x_2\|$. Prema tome površina paralelograma je

$$P = \|x_1\|_2 \cdot \|(I-P_2)x_2\|_2$$

Posmatrajmo sad trodimenzionalni slučaj.



Zapremina trodimenzionalnog paralelopipeda se računa po formuli površina baze puta visina. Površinu baze smo izračunali u prethodnom dijelu i ona iznosi

$$\|x_1\|_2 \, \|(I-P_2)x_2\|_2 .$$

Ako sa P_3 označimo ortogonalnu projekciju na $\text{span}\{x_1,x_2\}$ tada je $(I-P_3)x_3$ ortogonalna projekcija na $(\text{span}\{x_1,x_2\})^\perp$ pa je dužina za visinu paralelopipeda

$$\|(I-P_3)x_3\|_2$$

Prema tome zapremina paralelopipeda, u trodimenzionalnom slučaju je

$$V = \|x_1\|_2 \, \|(I-P_2)x_2\|_2 \, \|(I-P_3)x_3\|_2 .$$

Sad matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je zapremina paralelopipeda generisana linearno nezavisnim skupom $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

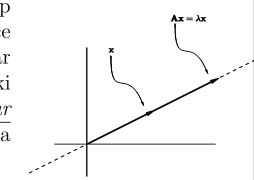
$$V_n = \|x_1\|_2 \, \|(I-P_2)x_2\|_2 \, \|(I-P_3)x_3\|_2 \dots \|(I-P_n)x_n\|_2$$

gdje su P_k ortogonalne projekcije na $\text{span}\{x_1,x_2,\dots,x_{k-1}\}$.

Primjetimo da ako je $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ortogonalan skup, $V_n = \|x_1\|_2 \, \|x_2\|_2 \cdots \|x_n\|_2$.

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori Neka je $\text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ skup svih $m\times n$ matrica čiji su elementi realni brojevi. *Svojstveni vektor* matrice $A \in \text{Mat}_{m\times n}$ je nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da $Av = \lambda v$ za neki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. *Svojstvena vrijednost* od A je skalar λ takav da $Av = \lambda v$ za neki nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$. Bilo koji takav par, (λ, v), se naziva *svojstveni par* matrice A. Skup svih različitih svojstvenih vrijednosti, označavamo sa $\sigma(A)$.



- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ je singularna $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\{x \neq 0 \,|\, x \in \ker(A - \lambda I)\}$ je skup svih svojstvenih vektora pridruženih λ-di. Vektorski prostor $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I) := \{x \,|\, (A - \lambda I)x = 0\}$ se naziva *svojstveni prostor* matrice A.
- Za kvadratnu matricu A, broj $\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ se naziva *spektralni prečnik* od A.

1. Dat je operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisan na sljedeći način

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y \\ x + 5y \end{pmatrix}.$$

Odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti operatora f.

2. Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 17 & -10 & -5 \\ 45 & -28 & -15 \\ -30 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom i jednačina

- *Karakteristični polinom* matrice $A \in \text{Mat}_{n\times n}$ je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Stepen od $p(\lambda)$ je n, i vodeći član u $p(\lambda)$ je $(-1)^n\lambda^n$.
- *Karakteristična jednačina* za A je $p(\lambda) = 0$.
- Svojstvena vrijednosti za A su rješenja karakteristične jednačine ili, ekvivalentno, korijeni karakterističnog polinoma.
- Iako matrica A ima n svojstvenih vrijednosti, neke svojstvene vrijednosti mogu biti kompleksni brojevi (čak iako su elementi matrice A realni brojevi), a neke svojstvene vrijednosti se mogu ponoviti.
- Ako matrica A sadrži samo realne brojeve, tada njezine kompleksne svojstvene vrijednosti se moraju pojaviti u konjugovanim parovima - tj., ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$.

3. Data je matrica

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti karakteristični polinom matrice A, kao i odgovarajće svojstvene prostore.

Rješenje-upute: (b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$; $\sigma(A) = \{1 + i, 1 - i\}$; $\ker(A - (1 + i)I) = \text{span}\{(i, 1)^\top\}$; $\ker(A - (1 - i)I) = \text{span}\{(-i, 1)^\top\}$. □

Višestrukost Neka je $\sigma(A)$ skup svih (različitih) svojstvenih vrijednosti matrice A, i neka je $\lambda \in \sigma(A)$. *Algebarska višestrukost* od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma matrice A). Drugim riječima, $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda_i) = a_i$ ako i samo ako je $(x-\lambda_1)^{a_1}...(x-\lambda_s)^{a_s} = 0$ karakteristična jednačina matrice A. U slučaju kada je $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda) = 1$, λ se naziva *jednostavna svojstvena vrijednost*. *Geometrijska višestrukost* od λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, $\operatorname{geo\,mult}_A(\lambda)$ je maksimalan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih matrici λ.

4. Odrediti algebarske i geometriske višestrukosti svojstvenih vrijednosti matrice

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Zadana je matrica

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ a & 2 & -3 \\ b & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ i algebarske višestrukosti (algebarske kratnosti) svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Sličnost

• Za dvije $n \times n$ matrice A i B kažemo da su *slične* kadgod postoji nesingularna matrica P takva da je $P^{-1}AP = B$. Proizvod $P^{-1}AP$ se naziva *transformacija sličnosti* na A.

• **Fundamentalni problem.** Za datu kvadratnu matricu A, svesti je na najjednostavniju moguću formu primjenom transformacija sličnosti.

6. Neka je data $n \times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice A, koje ne moraju biti različite, sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$, i pretpostavimo da su $v_1, v_2, ..., v_n$ linearno nezavisni. Pokazati da tada vrijedi

$$P^{-1}AP = D$$

gdje su

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & ... & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dijagonabilnost Neka je data matrica $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Za matricu A kažemo da je *dijagonabilna* ako postoji invertibilna matrica P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, sa elementima iz $\mathbb{R}$. Drugim riječima, za kvadratnu matricu A kažemo da je dijagonabilna kadgod je slična dijagonalnoj matrici.

7. Dijagonalizitati matricu

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

(tj. odrediti invertibilnu matricu P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, za koju vrijedi da $P^{-1}AP = D$, gdje je D dijagonalna matrica sa elementima iz $\mathbb{R}$).

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Pretpostavimo da je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrica oblika $n \times n$ čiji su elementi iz $\mathbb{R}$. Pretpostavimo dalje da postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da $Av = \lambda v$. Tada kažemo da je λ svojstvena vrijednost matrice A, a da je v svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost $n \times n$ matrice A, a da je v svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. Tada je $Av = \lambda v = \lambda I v$, gdje je I $n \times n$ jedinična matrica, pa je $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$. Kako je $v \in \mathbb{R}^n$ nenula, slijedi da moramo imati

$$\det(A - \lambda I) = 0. \qquad \ldots (1)$$

Drugim riječima, moramo imati

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Primjetimo da je (1) polinomijalna jednačina. Rješavajući jednačinu (3) dobićemo svojstvene vrijednosti matrice A.

S druge strane, za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A, skup

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid (A-\lambda I)v = 0\} \qquad \ldots (2)$$

je jezgro matrice $A-\lambda I$, podprostor od $\mathbb{R}^n$.

Polinom (1) nazivamo karakteristični polinom matrice A. Za bilo koji korijen λ polinoma (1), prostor (2) nazivamo svojstveni prostor koji odgovara svojstvenom prostoru λ.

Data je operator $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana na sljedeći način

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3y \\ x+5y \end{pmatrix}$$

Odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti operatora f.

Rj.
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3y \\ x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trebamo odrediti broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i nenula vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ takve da

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Drugim riječima

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}^{=\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \ldots (*)$$

Kako je v nenula vektor

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$$

Ako zamjenimo $\lambda = 2$ u $(*)$ dobićemo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = 0, \quad \text{sa korjenom} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t, \ t \in \mathbb{R}$$

Ako zamjenimo $\lambda = 6$ u $(*)$ dobićemo

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \quad \text{sa korijenom} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \ s \in \mathbb{R}$$

Svojstveni parovi operatora f su $\left(2; \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ i $\left(6; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -12\\ 0 & -13 & 30\\ 0 & -9 & 20\end{pmatrix}.$$

Rj.

Trebamo odrediti brojeve $\lambda\in\mathbb{R}$ i nenula vektore $v\in\mathbb{R}^3$ takve da

$$Av=\lambda v$$
$$Av-\lambda v=0$$
$$(A-\lambda I)v=0$$
$$\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 6 & -12\\ 0 & -13-\lambda & 30\\ 0 & -9 & 20-\lambda\end{pmatrix}=0$$

tražene svojstvene vrijednosti

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$$

(a) Svojstvene vektore koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti -1 ćemo dobiti rješenjem sistema

$$\begin{pmatrix}0 & 6 & -12\\ 0 & -12 & 30\\ 0 & -9 & 21\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t,\ \underset{t\neq 0}{t\in\mathbb{R}}$$

(b) Za $\lambda_2=2$

$$(A-2I)v=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -12\\ 0 & -15 & 30\\ 0 & -9 & 18\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}s,\ \underset{s\neq 0}{s\in\mathbb{R}}$$

(c) Za $\lambda_3=5$, $(A-5I)v=\begin{pmatrix}-6 & 6 & -12\\ 0 & -18 & 30\\ 0 & -9 & 15\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}u,\ \underset{u\neq 0}{u\in\mathbb{R}}$

Odgovarajući svojstveni prostori su $\mathcal{V}_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{V}_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{V}_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}\right\}$ (geometrijski predstavljaju prave koje prolaze kroz koordinatni početak).

Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$A=\begin{pmatrix}17 & -10 & -5\\ 45 & -28 & -15\\ -30 & 20 & 12\end{pmatrix}$$

Rj.

$$Av=\lambda v$$
$$Av-\lambda v=0$$
$$(A-\lambda I)v=0$$
$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix}17-\lambda & -10 & -5\\ 45 & -28-\lambda & -15\\ -30 & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}2-\lambda & -10 & -5\\ 2-\lambda & -28-\lambda & -15\\ 2-\lambda & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -10 & -5\\ 1 & -28-\lambda & -15\\ 1 & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(\lambda+3)(\lambda-2)^2$$

Tražene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=-3$ i $\lambda_2=2$.

(a) Svojstveni vektor (vektori) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -3 je rješenje sistema

$$(A+3I)v=\begin{pmatrix}20 & -10 & -5\\ 45 & -25 & -15\\ -30 & 20 & 15\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}s,\ \underset{s\neq 0}{s\in\mathbb{R}}$$

(b) Za $\lambda_2=2$ imamo $(A-2I)v=\begin{pmatrix}15 & -10 & -5\\ 45 & -30 & -15\\ -30 & 20 & 10\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}t,\ \underset{t\neq 0}{t\in\mathbb{R}};\ v_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}u,\ \underset{u\neq 0}{u\in\mathbb{R}}$

Odgovarajući svojstveni prostori su $\mathcal{V}_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ (prava kroz koordinatni početak), dok je svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=2$ $\mathcal{V}_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$, ravan kroz koordinatni početak.

(#) Data je matrica

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Odrediti karakteristični polinom matrice A, kao i odgovarajuće svojstvene prostore.

Rj. $\det(A-\lambda I)=0$ je karakteristični polinom

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)-3=\lambda^2-8\lambda+12$$

$(\lambda-2)(\lambda-6)=0$ je traženi karakteristični polinom

Prema prethodnom zadatku odgovarajući svojstveni parovi su $\left(2; \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ i $\left(6; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 2 je

$$\left\{v\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = \mathbf{0}\right\} = \left\{\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 6 je

$$\left\{v\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = \mathbf{0}\right\} = \left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Prisjetimo se:
Prostor $\{v\in\mathbb{R}^n \mid (A-\lambda I)v=0\}$ se naziva svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

(#) Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost matrice A, kojoj odgovara svojstveni vektor v. Pokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi $A^n v=\lambda^n v$.

Rj. Pokažimo da $A^k v=\lambda^k v$ za $\forall k\in\mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $Av=\lambda v$ ((λ, v) je svojstveni par matrice A)

$k=2$: $A^2v=A(Av)=A(\lambda v)=\lambda(Av)=\lambda(\lambda v)=\lambda^2 v$

Tvrdnja vrijedi za $k=1$ i $k=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da jednakost $A^k v=\lambda^k v$ vrijedi za svaki k od 1 do n (uključujući i n tj. $A^n v=\lambda^n v$) i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da vrijedi $A^{n+1}v=\lambda^{n+1}v$.

$$A^{n+1}v=A(A^n v) \overset{\text{prema pretpostavci}}{=} A(\lambda^n v)=\lambda^n(Av)=\lambda^n(\lambda v)=\lambda^{n+1}v$$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za svaki prirodan broj n.

Neka je $Sim_{n\times n}(\mathbb{R})$ prostor svih simetričnih matrica čiji su elementi realni brojevi i neka je $A \in Sim_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pokazati da ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ različite svojstvene vrijednosti matrice A kojima, redom, odgovaraju svojstveni vektori v_1 i v_2 tada je $v_1 \perp v_2$.

Rj.

$$v_1 \perp v_2 \iff \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \iff v_1^T v_2 = 0$$

$$\lambda_1 (v_1^T \cdot v_2) = \lambda_1 v_1^T \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1)^T \cdot v_2 = (A v_1)^T \cdot v_2 = v_1^T A^T v_2 =$$

$$= v_1^T A v_2 = v_1^T \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1^T v_2) \Rightarrow$$

A simetrična matrica $\iff A^T = A$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1^T v_2) = 0 \xRightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} v_1^T \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

Pokazati da su svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice A realni brojevi.

Rj.

Neka je $u \in \mathbb{C}$ svojstveni vektor od A sa svojstvenom vrijednošću λ. Tada imamo

$Au = \lambda u$ / primjenimo konjugovano kompleksnu operaciju

$\overline{Au} = \overline{\lambda u}$

$\overline{A}\,\overline{u} = \overline{\lambda}\,\overline{u}$

$A\overline{u} = \overline{\lambda}\,\overline{u} \Rightarrow \overline{u}$ je svojstveni vektor od A.

Prema definiciji svojstvenog vektora, svojstveni vektor je različit od nule, a kako je

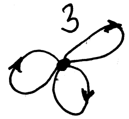
$$\langle u, \overline{u} \rangle = u^T u = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n) \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 > 0$$

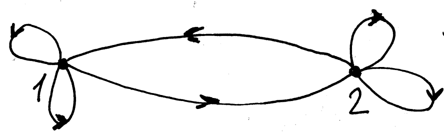
to su u i $\overline{u}$ dva različita svojstvena vektora matrice A.

Prema prethodnom zadatku ako su u i $\overline{u}$ svojstveni vektori matrice A kojima odgovaraju različite svojstvene vrijednosti λ i $\overline{\lambda}$ tada je $u \perp \overline{u}$ #kontradikcija

Možemo zaključiti $\lambda = \overline{\lambda}$.

(#) Odrediti algebarske i geometrijske višestrukosti svojstvenih vrijednosti orjentisanog grafa Γ.





graf Γ

Rj: Svojstvena vrijednost grafa Γ je u stvari svojstvena vrijednost matrice susjedstva grafa Γ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Algebarska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$ a njihove odgovarajuće višestrukosti su

$$\text{alg mult}_A(1) = 1 \qquad \text{alg mult}_A(3) = 2$$

Geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je dimenzija prostora $\ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, $\text{geo mult}_A(\lambda)$ je maksimalni broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih λ.

$\ker(A-\lambda I)$ su vektori iz opšteg rješenja sistema $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang}(\overline{A-\lambda I}) = \text{rang}(A-\lambda I) = 2$$

1 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{geo mult}_A(1) = 1$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1 = s$, $x_3 = t$, $s,t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{geo mul}_A(3) = 2$$

Odrediti algebarske i geometrijske višestrukosti svojstvenih vrijednosti matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

te opisati odgovarajuće svojstvene prostore.

Rj.

Algebarska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{}{\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 2-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\ldots=(\lambda-2)^3$$

Matrica A ima samo jednu svojstvenu vrijednost $\lambda=2$.

$$\text{alg mult}_A(2)=3$$

Geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, geo mult$_A(\lambda)$ je maksimalan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ.

Za $\lambda=2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ 2 promjenjive uzimamo proizvoljno $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3t-2s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}s, \quad s,t\in\mathbb{R}$$

$$\text{geo mult}_A(2)=2$$

Svojstveni vektori koji odgovaraju $\lambda=2$ su $v_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda=2$ je $V=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dimenzije dva (ravan kroz koordinatni početak).

(#) Zadana je matrica

$$A=\begin{pmatrix}7&-4&0\\a&-7&b\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1. Odrediti parametre $a,b\in\mathbb{R}$ i algebarske višestrukosti (algebarske kratnosti) svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Rj.

λ - svojstvena vrijednost, v - svojstveni vektor

$$Av=\lambda v$$
$$Av-\lambda v=0$$
$$(A-\lambda I)v=0$$

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix}7-\lambda&-4&0\\a&-7-\lambda&b\\3&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Iz postavke zadatka znamo da za $\lambda=\pm1$ imam $\det(A-\lambda I)=0$

tj. za $\lambda=1$:

$$\begin{vmatrix}6&-4&0\\a&-8&b\\3&-2&-1\end{vmatrix}\ \underset{II_k+III_k\cdot(-2)}{\overset{I_k+III_k\cdot 3}{=\!=\!=}}\ \begin{vmatrix}6&-4&0\\a+3b&-2b-8&b\\0&0&-1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}6&-4\\a+3b&-2b-8\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)(\cancel{-12b}-48+4a+\cancel{12b})=(-1)(-48+4a)=48-4a=0$$

$$4a=48$$
$$a=12$$

Za $\lambda=-1$

$$\begin{vmatrix}8&-4&0\\12&-6&b\\3&-2&1\end{vmatrix}\ \underset{II_k+III_k\cdot 2}{\overset{I_k+III_k\cdot(-3)}{=\!=\!=}}\ \begin{vmatrix}8&-4&0\\12-3b&2b-6&b\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&-4\\12-3b&2b-6\end{vmatrix}=16b-48+$$
$$+48-12b=0$$

$$4b=0$$
$$b=0$$

Time smo dobili da je $a=12$, $b=0$ i $A=\begin{pmatrix}7&-4&0\\12&-7&0\\3&-2&0\end{pmatrix}$.

Odredimo svojstvene vrijednosti matrice A.

$$\begin{vmatrix}7-\lambda&-4&0\\12&-7-\lambda&0\\3&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda&-4\\12&-7-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Prema tome, svojstvene vrijednosti matrice A su $-1, 0$ i 1 a odgovarajuće algebarske višestrukosti su

$$\text{alg mult}_A(-1)=1,\quad \text{alg mult}_A(0)=1,\quad \text{alg mult}_A(1)=1.$$

(b)

$$A=\begin{pmatrix}1&-12&5\\a&2&-3\\b&1&-2\end{pmatrix}$$

$a=0$, $b=0$, $p(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$$\text{alg mult}_A(1)=2,\quad \text{alg mult}_A(-1)=1$$

Problem dijagonalizacije

Neka je data matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Za matricu A kažemo da je dijagonabilna ako postoji invertibilna matrica P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, sa elementima u $\mathbb{R}$.

PROCES DIJAGONALIZACIJE. (dokaz da je proces tačan i da vodi ka rješenju pogledati u postavke i rješenja prvih nekoliko zadataka koji slijede)

Pretpostavimo da je data matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Provjerimo da li su n korijena karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$ realni brojevi.

(2) Ako nisu, tada matrica A nije dijagonabilna. Ako jesu, tada odredimo svojstvene vektore koji odgovaraju ovim svojstvenim vrijednostima. Provjerimo da li možemo pronaći n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.

(3) Ako ne možemo, tada A nije dijagonabilna. Ako možemo, tada napišimo

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice A, a $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ su redom njihove odgovarajući svojstveni vektori. Tada $P^{-1}AP = D$.

(#) Neka je data $n\times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ i pretpostavimo da su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, koje ne moraju biti različite, sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, i pretpostavimo da su $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Pokazati da tada vrijedi

$$P^{-1}AP = D$$

gdje

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Rj. Kako su $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni, slijedi da oni formiraju bazu za $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

pa se $\forall u \in \mathbb{R}^n$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \text{gdje su } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \dots(1)$$

i vrijedi

$$Au = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n. \quad \dots(2)$$

Ako sa α označimo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ tada se (1) i (2) mogu redom napisati kao

$$u = P\alpha \quad i \quad Au = P\begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\alpha_n \end{pmatrix} = PD\alpha$$

pa imamo

$$AP\alpha = PD\alpha$$

Primijetimo da je $\alpha \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Ovo povlači da je $(AP-PD)\alpha = 0$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Time moramo imati $AP = PD$. Kako su kolone od P lin. nez $\Rightarrow$ P je invertibilna. Time $P^{-1}AP = D$, što je i trebalo pokazati.

Dijagonalizirati matricu $A=\begin{pmatrix}3&3\\1&5\end{pmatrix}$ (tj. odrediti invertibilnu matricu P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, za koju vrijedi da $P^{-1}AP=D$, gdje je D dijagonalna matrica sa elementima iz $\mathbb{R}$).

Rj. Primijetimo se

Ako je $A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ čiji su svojstveni parovi $(\lambda_1,v_1),(\lambda_2,v_2),\ldots,(\lambda_n,v_n)$ gdje svojstvene vrijednosti λ_i ne moraju biti različite, a odgovarajući svojstveni vektori $v_1,v_2,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$ su linearno nezavisni, tada

$$P^{-1}AP=D$$

gdje $P=\begin{pmatrix}|&|&&|\\v_1&v_2&\ldots&v_n\\|&|&&|\end{pmatrix}$ i $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\vdots&&\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}$.

U jednom od prethodnih zadataka smo izračunali da su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1=2$ i $\lambda_2=6$ sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ i $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Kako su v_1 i v_2 linearno nezavisni to vrijedi da je,

$$P=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$$

i $P^{-1}AP=D$.

Za matricu A odrediti matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A=\begin{pmatrix}1&-5\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Rj.

$Av=\lambda v$

$Av-\lambda v=0$

$(A-\lambda I)v=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-5\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=\lambda^2+4$$

$$\lambda^2+4=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm 2i$$

(a) $\lambda_1=-2i$ $\quad 1-4i^2$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1+2i&-5&0\\1&-1+2i&0\end{array}\right]\overset{I\cdot(1-2i)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}5&-5+10i&0\\1&-1+2i&0\end{array}\right]\overset{I:5}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}1&-1+2i&0\\1&-1+2i&0\end{array}\right]\overset{II+I\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-1+2i&0\\0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow x_1+(-1+2i)x_2=0$$

jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2=s$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-2i)s\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2i\\1\end{pmatrix}s,\ s\in\mathbb{R},\ s\neq 0$$

$v_1=\begin{pmatrix}1-2i\\1\end{pmatrix}$ svojstveni vektor koji odgovara svojstv. vr. $\lambda_1=-2i$

(b) $\lambda_2=2i$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1-2i&-5&0\\1&-1-2i&0\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-1-2i&0\\0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}t,\ t\in\mathbb{R},\ t\neq 0$$

$\Rightarrow$ $v_2=\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=2i$

Tražena matrica P je $P=\begin{bmatrix}1-2i&1+2i\\1&1\end{bmatrix}$

(#) Odrediti realan broj a tako da matrica $A=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix}$ ima svojstveni vektor $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Može li se matrica A dijagonalizirati?

Rj.

$A=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, neka je λ svojstvena vrijednost koja odgovara svojstvenom vektoru v. Tada

$$Av=\lambda v$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i^2+1 \\ 2i^2+a \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a-2 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda=0 \\ a=2 \end{matrix}$$

Dobili smo da je $\lambda=0$, $a=2$, $A=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$.

Provjerimo – odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A:

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & 1 \\ 2i & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{2i}-i\lambda-2\lambda+\lambda^2-\cancel{2i}=\lambda^2+(-i-2)\lambda=\lambda(\lambda+(-i-2))$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1=0$, $\lambda_2=i+2$

Za $\lambda_1=0$ imamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 2i & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II_v+I_v(2)} \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

1 promjenjiva uzimamo proizv. npr. $x_1=s$

$x_1 i + x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ -is \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}s,\ s\in\mathbb{R},\ s\neq 0$$

Ako za s uzmemo i imamo $v_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=0$.

Za $\lambda_2=i+2$ imamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2i & -i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II_v+I_v\cdot i} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

1 promjen. uzim. proizv. npr. $x_1=t$

$-2x_1+x_2=0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t,\ t\in\mathbb{R},\ t\neq 0$$

Ako za t uzmemo 1 imam da je $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=i+2$.

Vektori v_1 i v_2 su linearno nezavisni pa je $P=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}-\frac{4i}{5} & \frac{1}{5}+\frac{2i}{5} \\ \frac{1}{5}+\frac{2i}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=D,$$

gdje je $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}$.

Matrica A je dijagonabilna.

(#) Neka je $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ dijagonabilna matrica. Pokazati da A ima n linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$.

Rj.

Kako je A dijagonabilna to postoji invertibilna matrica P, sa elementima u $\mathbb{R}$ takva da je $D = P^{-1}AP$ dijagonalna matrica sa elementima u $\mathbb{R}$. Označimo sa $v_1, \dots, v_n$ kolone od P, drugim riječima, napišimo

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Također označimo sa $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ elemente na dijagonali matrice D tj. napišimo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Jasno je da imamo $AP = PD$. Slijedi da

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & A_2v_2 & \dots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Izjednačavajući kolone dobićemo $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$. Slijedi da matrica A ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Kako je P invertibilna matrica i $v_1, v_2, \dots, v_n$ su kolone od P, slijedi da su svojstveni vektori linearno nezavisni.

(#) Pretpostavimo da matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, kojima odgovaraju svojstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Pokazati da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni.

Rj.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno zavisni. Tada postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ne sve nula, t.d.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \qquad \dots (1)$$

Tada

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = \lambda_1\alpha_1 v_1 + \lambda_2\alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n = 0 \qquad \dots (2)$$

Kako su $v_1, v_2, \dots, v_n$ svojstveni vektori a time i različiti od nule, slijedi da najmanje dva broja iz skupa $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ su različiti od nule, a odatle slijedi da u skupu $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ nisu sve nule. Množeći (1) sa λ_n i oduzimajući od (2) dobićemo

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$$

Primjetimo da kako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ različiti, to su i svi brojevi $\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n$ nenula. Slijedi da su i vektori $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ linearno nezavisni.

Da sumiramo, možemo eliminisati jedan vektor i opet dobiti linearno zavisan skup. Ponavljajući ovaj argument konačno mnogo puta, doći ćemo do linearno zavisnog skupa od jednog vektora, što je absurdno.

Sadržaj - Zadaci sa ispitnih rokova podjeljeni po oblastima, sa rješenjima

1 Vektorski prostori i podprostori. Linearna nezavisnost. Baza i dimenzije

1. Neka je $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu odrediti bazu i dimenziju.

2. Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

3. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \,|\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski podprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog podprostora.

4. Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$$\text{vektorsko sabiranje: } \forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad u + v = uv;$$

$$\text{množenje skalarom: } \forall u \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha u = u^\alpha.$$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

2 Linearne transformacije

5. Neka je $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi $\mathcal{S}$ (drugim riječima $[T]_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ gdje je $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$). Odrediti matricu operatora T u bazi $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (drugim riječima odrediti $[T]_{\mathcal{S}'}$).

6. Neka je φ linearna transformacija $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Odrediti $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

7. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$) u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

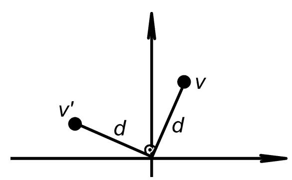
3 Promjena baza i sličnost

8. Neka je R rotacija, za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici desno.

a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti rotaciju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak.

c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.



9. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^2$ preslikava osnom simetrijom s osom u pravoj $y = x$ u vektor v' (vidi sliku). (Drugim riječima T je osna simetrija s osom u pravoj $y = x$).

(a) Odrediti matricu koordinata T u odnosu na standardnu bazu.

(b) Odrediti (koordinate) osnu simetriju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y = x$.

(c) Odrediti koordinate osne simetrije T (odrediti matricu operatora T) u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,1)^\top, (1,-1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

4 Invarijantni podprostori

11. Odrediti sve podprostore prostora $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Vektorska norma

12. Izračunati 1-, 2- i ∞-norme vektora $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 4i \end{pmatrix}$.

13. Ako je $x, y \in \mathbb{R}^n$ tako da $\|x+y\|_2 = \|x-y\|_2$, šta je $x^\top y$?

6 Unitarni prostori

14. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m \times n$ matrica. Pokazati da je funkcija definisana sa

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$$

unutrašnji (skalarni) proizvod na prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

7 Ortogonalni vektori

15. Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

8 Gram-Schmidtova procedura

16. Dat je vektorski prostor $\mathcal{L}$ vektorskog prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definisan sa

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AX - XA = \mathbf{0}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

Razmatrajući standardni unutrašnji proizvod za matrice $\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

17. Zadan je unitarni prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

18. Dat je unitarni prostor $\mathcal{P}_3$, polinoma stepena ≤ 3, sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} p(\lambda_i) q(\lambda_i)$$

gdje su $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. Primjenom Gram-Schmidtovog procesa ortonormirati bazu $\{-1, x, -x^2, x^3\}$.

9 Komplementarni podprostori

19. Dat je vektorski podprostor $\mathcal{M}$ prostora $\mathbb{R}^4$ definisan sa

$$\mathcal{M} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \,|\, z_1 + 2z_2 + z_3 = 0,\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 0,\ z_1 + 5z_2 + 4z_3 = 0\}.$$

Odrediti mu jedan (direktni) komplement (koji nije ortogonalni komplement).

20. U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^\top$ i $(0,1,0,1,0)^\top$ i podprostor

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.
(b) Odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$.
(c) Odrediti neku bazu za (direktni) komplement prostora $\mathcal{L}$ (koji nije ortogonalni komplement).

10 Ortogonalna dekompozicija

21. Odrediti URV faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

22. Baza vektorskog prostora $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ je $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Odrediti mu jedan ortogonalni komplement (u odnosu na standardni unutrašnji (skalarni) proizvod $\langle x, y \rangle = x^\top y$).

23. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ dat je podprostor

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x^2 - 1, x + 1\}.$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x + 5$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

11 Ortogonalne projekcije

24. Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2,

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Provjeriti da li je sa $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$ definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.
b) Za podprostor $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.
c) Odredite ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2 + x + 2$ na $\mathcal{L}$.

(#) Neka je $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.
Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$, odrediti mu bazu i dimenziju.

Rj. Znamo da je neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je podprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako vrijedi:
(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$
(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Da li je $\mathcal{L}$ neprazan skup?
$\mathcal{L}$ je neprazan zato što npr. $(1, -1, 3) \in \mathcal{L}$

Za $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{L}$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_2)$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{=0} + \underbrace{y_1 + y_2}_{=0} = 0 \quad \ldots (*)$$

$$-(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) =$$

$$= \underbrace{-x_1 + 2x_2 + x_3}_{=0} \underbrace{-y_1 + 2y_2 + y_3}_{=0} = 0 \quad \ldots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da vrijedi (A1)

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(\underbrace{x_1 + x_2}_{=0}) = 0 \quad \ldots (\Delta)$$

$$-(\alpha x_1) + 2(\alpha x_2) + (\alpha x_3) = \alpha(\underbrace{-x_1 + 2x_2 + x_3}_{=0}) = 0 \quad \ldots (\Delta\Delta)$$

Iz (Δ) i $(\Delta\Delta)$ vidimo da vrijedi (M1)
$\mathcal{L}$ jeste vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$

Linearno nezavisan skup koji generira vektorski prostor V zovemo baza za V.

Ako je V podprostor od $\mathbb{R}^n$ tada:

$\mathcal{B}$ je baza za V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generira V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup od V

Prostor $\mathcal{L}$ možemo zapisati i u drugačijem obliku

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} = \ker\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}}_{=A}\Big)$$

$$\mathcal{L}=\ker(A)$$

Generator za $\ker(A)$ su linearno nezavisni vektori iz općeg rješenja $Ax=0$.

$$\begin{aligned} x_1+x_2 \quad &=0\\ -x+2x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-1&2&1&0\end{array}\right]\overset{II_v+I_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&3&1&0\end{array}\right]\overset{II_v:3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1/3&0\end{array}\right]$$

$$\overset{I_v-II_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/3&0\\0&1&1/3&0\end{array}\right]\Rightarrow$$ rang $A=$ rang $\bar{A}<3=$ broj nepoznatih sistem ima ∞ mnogo rješenja i 1 nepoznatu uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned}x_1 \quad -\tfrac{1}{3}x_3&=0\\ x_2+\tfrac{1}{3}x_3&=0\end{aligned} \qquad x_3=3t \quad x_1=t \quad x_2=-t \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\\3t\end{pmatrix}$$

Baza za $\mathcal{L}$ je $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$; $\dim\mathcal{L}=1$. što je trebalo naći

$\dim V=$ broj vektora u bilo kojoj bazi za V

Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A=\begin{pmatrix}7&3&0&\cdots&0&0\\2&7&3&\cdots&0&0\\0&2&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&7&3\\0&0&0&\cdots&2&7\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

Rj. Znamo da:

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A)=\{\mathbf{0}\}$ akko rang$(A)=n$ (gdje je $A_{n\times n}$)

Pa provjerimo da li je $\ker(A)=\{\mathbf{0}\}$.

(Primjetimo da je matrica A dijagonalno dominantna, tj. $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|$ za $\forall i=1,2,\dots,n$)

Pretpostavimo da postoji $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ takav da je $Ax=\mathbf{0}$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
7x_1+3x_2+0+\dots+0+0&=0\\
2x_1+7x_2+3x_3+\dots+0+0&=0\\
0+2x_2+7x_3+\dots+0+0&=0\\
\vdots\qquad\qquad&\\
0+0+0+\dots+7x_{n-1}+3x_n&=0\\
0+0+0+\dots+2x_{n-1}+7x_n&=0
\end{aligned}$$

Neka je $x_k=\max\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i posmatrajmo k-tu vrstu ovog sistema.

$$0+0+\ldots+2x_{k-1}+7x_k+3x_{k+1}+\ldots+0=0$$

$$7x_k=-2x_{k-1}-3x_{k+1} \quad /\,|\,|$$

$$7|x_k|=2|x_{k-1}|+3|x_{k+1}|\leq 2|x_k|+3|x_k|$$

$$7|x_k|\leq 5|x_k|$$

#kontradikcija $(7>5)$

(Slično bi imali i da je $k=1$ ili $k=n$.

Pretpostavka da postoji $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ takav da $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome

$\ker A=\{0\}$ $\Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

Matrica A je nesingularna (postoji A^{-1}).

(#) Neka je $V=\mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T$ fiksirani vektor iz V. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ iz V sa osobinom $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$ vektorski podprostor prostora V. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0\right\}$$

vektorski podprostor od V. Odrediti dimenziju i bazu ovog podprostora.

Rj.

Prisjetimo se:

Neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora V je podprostor od V ako i samo ako

(A1) $x,y\in\mathcal{S} \Rightarrow x+y\in\mathcal{S}$;

(M1) $x\in\mathcal{S} \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Pa pokažimo da vrijede osobine (A1) i (M1).

Izaberimo proizvoljne elemente $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Tada

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$. Uvedimo oznake $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M} \Leftrightarrow a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0 \Leftrightarrow a^Tx=0$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M} \Leftrightarrow a_1y_1+\ldots+a_ny_n=0 \Leftrightarrow a^Ty=0$$

$$a^Tx+a^Ty=0 \Leftrightarrow a^T(x+y)=0 \Rightarrow x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$$

Prema tome vrijedi (A1)

$$\alpha\cdot x=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}$$

$$a^Tx=0 \Rightarrow a^T\alpha x=0 \Rightarrow \alpha x\in M$$ vrijedi (M1)

M jest vektorski podprostor

Da bi odredili bazu i dimenziju napišimo M u drugačijem obliku

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1x_1+\dots+a_nx_n=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a^Tx=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\ker\left(\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\right).$$

Prema tome $M=\ker(A)$ gdje je $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$.

Znamo da kolone iz opšteg rješenja od $\ker(A)$ formiraju bazu za $\ker(A)$. Pretpostavimo da je $a\neq 0$. Kako je $\operatorname{rang}(A)=1$ ako posmatramo sistem $Ax=0$ to moramo uzeti $n-1$ promjenjivu proizvoljno. Pretpostavimo da je $a_1\neq 0$, kako je $a\neq 0$ to $\exists a_i\neq 0$

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$$

$$x_1=\frac{a_2}{a_1}x_2+\dots+\frac{a_n}{a_1}x_n$$

$$x=\begin{pmatrix}\frac{a_2}{a_1}x_2+\dots+\frac{a_n}{a_1}x_n\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Prema tome $\dim(M)=n-1$ i

$$B=\left\{\begin{pmatrix}\frac{a_2}{a_1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{a_3}{a_1}\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\frac{a_n}{a_1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

je baza za M.

(#) Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$+:\ \forall u,v\in\mathbb{R}^+ \quad u+v=u\cdot v;$

$\cdot:\ \forall u\in\mathbb{R}^+,\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\cdot u=u^\alpha.$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

Rj. Uzmimo proizvoljan realan broj (vektor iz $\mathbb{R}^+$) npr. $1\in\mathbb{R}^+$. Šta je $\operatorname{span}\{1\}$?

$$\operatorname{span}\{1\}=\{\alpha\cdot 1 \mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\{1^\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{1\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{1\}$$

Šta je $\operatorname{span}\{1,2\}$?

$$\operatorname{span}\{1,2\}=\{\alpha\cdot 1+\beta\cdot 2\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{1^\alpha+2^\beta\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{1^\alpha 2^\beta\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{2^\beta\mid\beta\in\mathbb{R}\}$$

Ova dva primjera nam nameću da je jedna baza vektorskog prostora $\{2\}$. Zašto? (a da je 1 neutralni element)

$$\operatorname{span}\{2\}=\{\alpha\cdot 2\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{2^\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

Da li je $\operatorname{span}\{2\}=\mathbb{R}^+$?

Uzmimo proizvoljan element $b\in\mathbb{R}^+$. Da li tada postoji $\alpha\in\mathbb{R}$ t.d. $2^\alpha=b$?

Ako za α uzmemo $\log_2 b$ tada $2^{\log_2 b}=b$.

Prema tome skup $\{2\}$ generiše $\mathbb{R}^+$ u odnosu na dvije date operacije.
(1 je neutralni element)
Kako $\alpha \cdot 2 = 1 \Rightarrow 2^\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ to je $\{2\}$ linearno nezavisan skup.
Prema tome dimenzija ovog vektorskog prostora je 1, a jedna moguća baza je $\{2\}$.

Za vježbu pokazati da je npr. skup $\{2,3\}$ linearno zavisan u ovom prostoru.

$$\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 3 = 1$$
$$2^\alpha + 3^\beta = 1$$
$$2^\alpha \cdot 3^\beta = 1$$
$$\vdots$$
$$\alpha = \log_2 \frac{1}{3}, \quad \beta = 1$$

Neka je $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi φ (drugim riječima $[T]_\varphi = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ gdje je: $\varphi = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$).

Odrediti matricu operatora T u bazi $\varphi' = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ (drugim riječima odrediti $[T]_{\varphi'}$).

Rj.
$$[T]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_\varphi & [T(e_2)]_\varphi & [T(e_3)]_\varphi \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}, \quad \varphi = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$[T(e_1)]_\varphi = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_\varphi = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_\varphi, \quad [T(e_3)]_\varphi = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\varphi$$

$$\Rightarrow T(x) = Tx \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ gdje je } T = \begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}$$

Odredimo α, β i γ t.d. $\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 2 \\ \beta - 2\gamma &= 5 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&2\\0&1&-2&5\\1&1&-1&0\end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow III_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\2&1&3&2\end{array}\right] \overset{III_v + I_v(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\0&-1&5&2\end{array}\right] \overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\0&0&3&7\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$3\gamma = 7, \quad \gamma = \frac{7}{3}, \quad \beta = 2\gamma + 5, \quad \beta = \frac{14}{3} + 5$$

$\beta = \frac{29}{3}$

Prema tome $\left[T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-22/3\\29/3\\7/3\end{pmatrix}$

$\alpha+\beta-\gamma=0$

$\alpha=\gamma-\beta=\frac{7}{3}-\frac{29}{3}=-\frac{22}{3}$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix};$$

Odredimo α, β i γ tako da $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&3\\0&1&-2&3\\1&1&-1&-1\end{array}\right]\overset{I_v\leftrightarrow III_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\2&1&3&3\end{array}\right]\overset{III_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\0&-1&5&5\end{array}\right]\sim$$

$$\overset{III_v+II_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&3&8\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}3\gamma=8\\ \gamma=\frac{8}{3}\end{array} \quad \begin{array}{l}\beta=2\gamma+3\\ =\frac{16}{3}+\frac{9}{3}\\ =\frac{25}{3}\end{array} \quad \begin{array}{l}\alpha+\beta-\gamma=-1\\ \alpha=-\frac{20}{3}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}=\begin{pmatrix}-20/3\\25/3\\8/3\end{pmatrix}$$

I na kraju

$$T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}\Rightarrow \underset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}=\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi'}=\begin{pmatrix}-22/3&-20/3&-3\\29/3&25/3&5\\7/3&8/3&0\end{pmatrix}$$

\# Neka je φ linearna transformacija $\varphi: \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ takva da

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=1,\ \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=1,\ \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=0,\ \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=0.$$

Odrediti $\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

Rj. Prisjetimo se

Linearna transformacija

Neka su U i V vektorski prostori nad $\mathbb{R}$. Linearna transformacija T sa U u V je linearna f-ja sa U i V. Drugim riječima

$$T(x+y)=T(x)+T(y) \quad i \quad T(\alpha x)=\alpha T(x) \quad \forall x,y\in U,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Napišimo vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, tj. odredi α,β,γ i δ t.d.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

Nije teško vidjeti da je $-\delta=d\Rightarrow\delta=-d$

$\beta+\delta=c\Rightarrow\beta=c-\delta\Rightarrow\beta=c+d$

$-\beta-\gamma-\delta=b\Rightarrow -c-\cancel{d}-\gamma+\cancel{d}=b\Rightarrow\gamma=-b-c$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=a\Rightarrow\alpha=a-\beta-\gamma-\delta=a-\cancel{c}-\cancel{d}+b+\cancel{c}+\cancel{d}=a+b$

Prema tome $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(a+b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+(c+d)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+(-b-c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+(-d)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Sad nije teško izračunati $\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

$$\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+b)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=1} + (c+d)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=1} + (-b-c)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} + (-d)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= a+b+c+d.$$

\# Zadana je linearni transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$), te mu odrediti po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}.$$

Standardna baza za $\mathcal{P}_2$ je $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardna baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^2)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sljedeće što želimo je odrediti bazu za jezgru i sliku od T.

$$\ker(T) = \{ g \in \mathcal{P}_2 \mid T(g) = 0 \}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ T(p) \mid p \in \mathcal{P}_2 \}$$

Prisjetimo se

Djelovanje operatora kao množenje matricom

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

Neka je g proizvoljan polinom iz $\mathcal{P}_2$, $g(x) = a + bx + cx^2$

$$[g]_{\varphi} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Sad možemo pisati

$$\ker(T) = \{ [g]_{\varphi} \mid [T(g)]_{\varphi'} = \mathbf{0} \} = \{ [g]_{\varphi} \mid [T]_{\varphi\varphi'} [g]_{\varphi} = \mathbf{0} \}$$

Prema tome $\ker(T) = \ker([T]_{\varphi\varphi'}) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{III_v - I_v \\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{III_v + II_v \\ IV_v + II_v \cdot (2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{IV_v + III_v \cdot (-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III_v : 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots (*)$$

$$\Rightarrow a = 0, \ b = 0, \ c = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \operatorname{span}\{0\}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ [T(p)]_{\varphi'} \mid [p]_{\varphi} \} = \{ [T]_{\varphi\varphi'} [p]_{\varphi} \mid [p]_{\varphi} \} = \operatorname{im}([T]_{\varphi\varphi'})$$

Osnovne kolone u $[T]_{\varphi\varphi'}$ formiraju bazu za $\operatorname{im}([T]_{\varphi\varphi'})$

$$\Rightarrow \operatorname{im}(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odredimo još polinom $g \in \mathcal{P}_2$ tako da $T(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

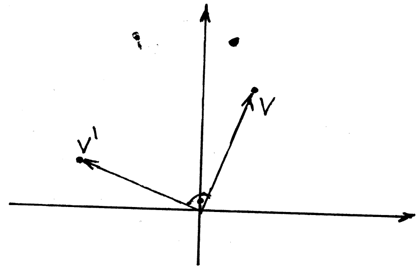
$$[T(g)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = [T]_{\varphi\varphi'} \cdot [g]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ a - b + c &= 1 \\ a + b + c &= 5 \\ a + 2b + 4c &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -b + c &= -1 \\ b + c &= 3 \\ 2b + 4c &= 2 \end{aligned}$$

sistem ~~nem~~ nema rješenje

Ne postoji polinom $g \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(g) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

\# Neka je R **rotacija**, za ugao od **$90°$** čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici



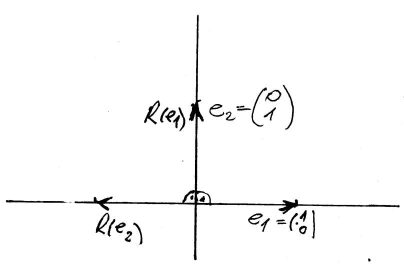
a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti rotaciju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ za ugao od $90°$ čiji je centar rotacije koordinatni početak.

Rj.

R je u stvari linearni operator na $\mathbb{R}^2$.

a) Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2\}$.



Primetimo da je $R(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ (vidi sliku) i $R(e_2) = R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$

Znamo da $[R]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ [R(e_1)]_\varphi & [R(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pa je $[R]_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Iz teorije Linearne algebre znamo

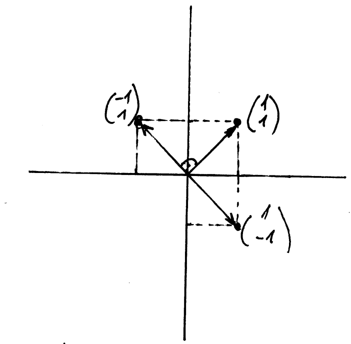
Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za vektorske prostore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

U našem slučaju

$$\left[R\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]_\varphi = [R]_\varphi \cdot \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.



Rj. $\varphi' = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$

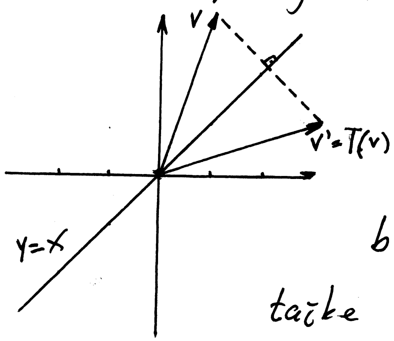
$[R]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[R\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[R\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | \end{pmatrix}$

$R\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vidi sliku) $\quad R\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_1$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_2$

$$[R]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji proizvoljan vektor $v\in\mathbb{R}^2$ preslikava osnom simetrijom s osom u pravoj $y=x$ u vektor v' (vidi sliku).



a) Odrediti matricu koordinata T u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti (koordinate) osnu simetriju tačke $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y=x$.

c) Odrediti koordinate osne simetrije T (odrediti matricu operatora T) u odnosu na bazu $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj. a) Prisjetimo se

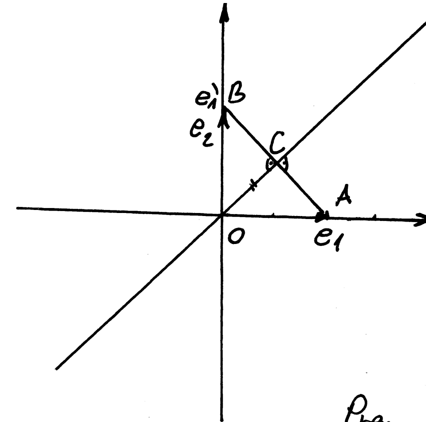
Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{e_1,e_2\}$ i da bi odredili $[T]_\varphi$ trebamo pronaći $[T(e_1)]_\varphi$ i $[T(e_2)]_\varphi$.



Pa posmatrajmo kako T djeluje na e_1 i e_2

$T(e_1)=e_1'$.

$$\left.\begin{matrix} AC\cong CB \\ \sphericalangle OCA\cong\sphericalangle OCB \\ OC\cong OC\end{matrix}\right\}\overset{SUS}{\Longrightarrow}\Delta OAC\cong\Delta OCB$$
$$\Downarrow$$
$$\underset{e_1}{OA}=\underset{e_2}{OB}$$

Prema tome imamo

$$T(e_1)=e_2=0\cdot e_1+1\cdot e_2$$
$$T(e_2)=e_1=1\cdot e_1+0\cdot e_2$$

$$[T]_\varphi=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$ tražena matrica koordinata.

b) Prisjetimo se

Djelovanje kao matrično množenje

Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ redom. Za $\forall u\in\mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\cdot[u]_{\mathcal{B}}.$$

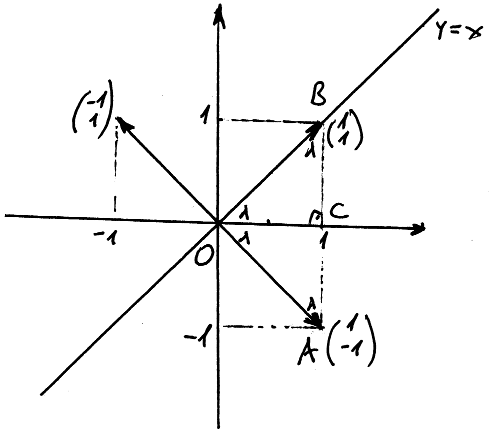
Mi u stvari tražimo $\left[T\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi=[T]_\varphi\cdot\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi=$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

Osna simetrija tačke $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y=x$ je tačka $\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$.

c) Trebamo pronaći $[T]_{\varphi'}$ gdje je $\varphi' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{e_1'}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{e_2'} \right\}$.

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | \end{pmatrix}.$$



Primjetimo da je vektor $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ okomit na pravu $y=x$. Zašto

OAC jkk pravougli

OCB jkk pravougli

$2\lambda = 90^\circ$

$\lambda = 45^\circ$

Sad primjetimo da je $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot e_1' + 0\cdot e_2'$

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot e_1' + (-1)\cdot e_2'$$

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ traženo rješenje

Provjera:

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = 1\cdot e_1' + 0\cdot e_2' = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}$$

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao od $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y=x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

Rj: Prisjetimo se

Matrica koordinata (matrica operatora)

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

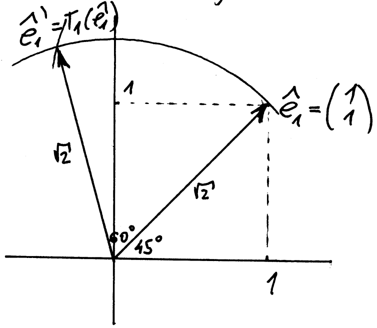
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Ako elemente baze $\mathcal{B}$ označimo sa $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ mi u stvari tražimo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo prvo rotaciju za $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru - i ovaj operator označimo sa T_1.

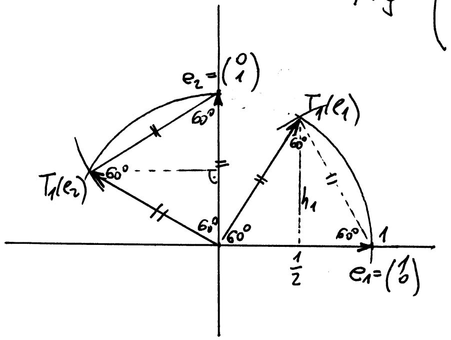


Primjetimo da je $T(\hat{e}_1)$ teško izračunati direktnim putem.

Da bi izračunali $T(\hat{e}_1)$ koristit ćemo standardnu bazu $\varphi = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ i sljedeću Teoremu:

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$ imamo $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$

$\varphi = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ $\qquad [T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(e_1)]_\varphi & [T_1(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$



$h_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\qquad h_2^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

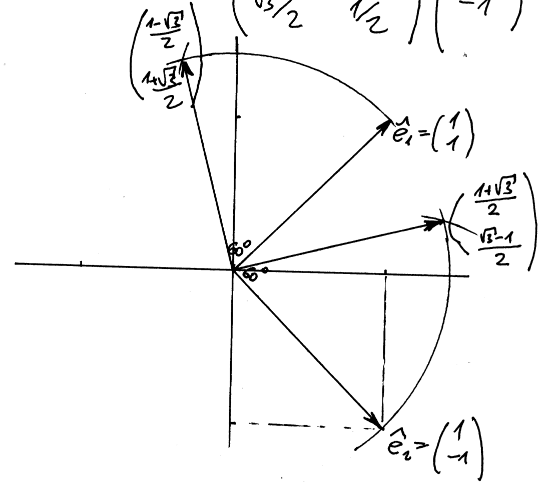
$$T_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_1)]_\varphi$$

$$T_1(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_2)]_\varphi$$

Prema tome $[T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Sad imamo

$$[T_1(\hat{e}_1)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$[T(\hat{e}_2)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$



Dalje nije teško pokazati da se proizvoljan vektor $v = \binom{\alpha}{\beta}$ osnom simetrijom s osom u pravoj $y = x$ preslikava u vektor $\binom{\beta}{\alpha}$

Prema tome $\quad T(\hat{e}_1) = T\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$$T(\hat{e}_2) = T\binom{1}{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Odredimo još koordinate od $T(\hat{e}_1)$ i $T(\hat{e}_2)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\binom{1}{1} + \beta\binom{1}{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad [T(\hat{e}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$+\quad \alpha - \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\beta = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$2\beta = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \alpha-\beta&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ +\quad &\\ \hline 2\alpha&=\frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\qquad -:\quad 2\beta=\frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\beta=-1$$

$$\beta=-\frac{1}{2}$$

$$2\alpha=\sqrt{3}\qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$ tražena matrica operatora

Neka je v proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$ npr. $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\ldots=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{3}\\ (\alpha+\beta)\sqrt{3}-(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$ tražene koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

Odrediti sve podprostore od $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Rj. Podprostori od $\mathbb{R}^2$ mogu biti dimenzije 0, 1 i 2.

- Trivijalni podprostor $\{\mathbf{0}\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ je jedini nula-dimenzionalni prostor pa je on i jedini nula-invarijantan podprostor od $\mathbb{R}^2$.

Podprostor od $\mathbb{R}^2$ koji je dimenzije 2 mora biti sam $\mathbb{R}^2$ (zašto?). Pa je $\mathbb{R}^2$ jedini dvo-dimenzionalni invarijantan podprostor.

Pravi problem predstavlja pronaći sve jedno-dimenzionalne invarijantne podprostore.

Posmatrajmo jednodimenzionalan podprostor $\mathcal{M}$ koji je generisan sa $x\neq 0$ ($\mathcal{M}=\mathrm{span}\{x\}=\{\alpha x \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$) takav da je $A(\mathcal{M})\subseteq\mathcal{M}$. Tada

$$Ax\in\mathcal{M}\Rightarrow \exists \text{ skalar } \lambda \text{ takav da } Ax=\lambda x\Rightarrow (A-\lambda I)x=0.$$

Drugim riječima $\mathcal{M}\subseteq\ker(A-\lambda I)$. Kako je $\dim\mathcal{M}=1$, mora biti slučaj da $\ker(A-\lambda I)\neq 0$ i λ mora biti skalar takav da je $(A-\lambda I)$ singularna matrica.

Pitanje: Zašto $(A-\lambda I)$ ne smije biti nesingularna matrica?

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{I_v\leftrightarrow II_v}\begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{II_v+I_v\cdot\frac{-\lambda}{2}}\begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda\\ 0 & 1+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}\end{pmatrix}$$

A odavde vidimo da će $A-\lambda I$ biti singularna matrica akko $1+\frac{\lambda^2-3\lambda}{2}=0$ tj. akko je λ korijen od

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Prema tome $\lambda=1$ i $\lambda=2$ i direktno računanje povlači dva jednodimenzionalna invarijantna podprostora

$$M_1=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

i $M_2=\ker(A-2I)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ i ovo su tražena rješenja

---

Usput, primijetimo da $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$ i $[A]_{\mathcal{B}}=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ gdje $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

U općem slučaju, skalare λ za koje $(A-\lambda I)$ je singularna zovemo svojstvene vrijednosti od A, i nenula vektore u $\ker(A-\lambda I)$ su poznati kao svojstveni vektori za A. Kao što ovaj primjer pokazuje, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su od velike važnosti u identificiranju invarijantnih podprostora i u svođenju matrica pomoću transformacija sličnosti.

Izračunati 1-, 2- i ∞-norme vektora $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$.

R.j.

$$\|x\|_p\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

Za $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ imamo $\|x\|_2=(4+1+16+4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$

$$\|x\|_1=2+1+4+2=9$$

$$\|x\|_\infty=\max\{2,1,4,2\}=4$$

Za $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$ imamo $|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$|1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$|4i|=\sqrt{16+0}=4$$

$$\|y\|_2=(2+2+1+16)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{21}$$

$$\|y\|_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}+1+4=2\sqrt{2}+5$$

$$\|y\|_\infty=\max\{\sqrt{2},\sqrt{2},1,4\}=4$$

Primijetimo da je $\|x\|_\infty<\|x\|_2<\|x\|_1$

$$\|y\|_\infty<\|y\|_2<\|y\|_1$$

Ako je $x, y \in \mathbb{R}^n$ tako da $\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2$, šta je $x^T y$?

Rj.

$$\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2 \quad /^2$$

$$\|x-y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2$$

$$(x-y)^T(x-y) = (x+y)^T(x+y)$$

$$(x^T - y^T)(x-y) = (x^T+y^T)(x+y)$$

$$x^Tx - x^Ty - y^Tx - y^Ty = x^Tx + x^Ty + y^Tx + y^Ty$$

$$\|x\|_2^2 - x^Ty - x^Ty - \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + x^Ty + x^Ty + \|y\|_2^2$$

$$-2x^Ty = 2x^Ty$$

$$4x^Ty = 0$$

$$x^Ty = 0$$

Posmatrajmo vektorski prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica. Pokazati da je f-ja definisana sa

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{trag}(A^T B)$$

unutrašnji proizvod za $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(Ovaj proizvod je poznat pod imenom standardni unutrašnji proizvod za matrice). $\boxed{\operatorname{trag}(A) = \text{suma dijagonalnih elemenata matrice } A}$

Rj. Trebamo provjeriti da li vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $\langle A, A\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle A, A\rangle \geq 0$ i $\langle A, A\rangle = 0$ akko $A = \mathbf{0}$.

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{trag}(A^T A) = \operatorname{trag}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2) + \dots + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{nn}^2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ij}^2}_{\in\mathbb{R}}}_{\in\mathbb{R}} \geq 0 \quad \text{i vidimo da } \langle A, A\rangle = 0 \text{ akko } A = \mathbf{0}$$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ za svaki skalar α

$$\langle A, \alpha B\rangle = \operatorname{trag}(A^T \cdot \alpha B) = \alpha \operatorname{trag}(A^T B) = \alpha\langle A, B\rangle$$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

Primjetimo da je $\operatorname{trag}(A^T B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ (ZAŠTO?)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+\dots+a_{n1}b_{n1} & \square & \dots & \square \\ \square & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{n2}b_{n2} & & \square \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \square & \square & \dots & a_{1n}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B+C \rangle = trag(A^T(B+C)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = trag(A^TB) + trag(A^TC)$$

$$= \langle A,B \rangle + \langle A,C \rangle$$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ (za kompleksan vekt. prost. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$)

ZA VJEŽBU

Data f-ja jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(#) Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

Rj. (a) Dva vektora u i v su međusobno ortogonalna akko $\langle u,v \rangle = 0$, što označavamo sa $u \perp v$.

za $\mathbb{R}^4$ $\langle u,v \rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$

$\langle x_1, x_2 \rangle = 1-1+0+0=0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

$\langle x_1, x_3 \rangle = -1+1+0+0=0 \Rightarrow x_1 \perp x_3$

$\langle x_2, x_3 \rangle = -1-1+2+0=0 \Rightarrow x_2 \perp x_3$

Dati vektori su međusobno ortogonalni.

(b) Trebamo pronaći vektor $x_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ t.d. $x_1 \perp x_4$, $x_2 \perp x_4$, $x_3 \perp x_4$ tj. $x_1^T x_4 = 0$, $x_2^T x_4 = 0$ i $x_3^T x_4 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} II_v - I_v \\ \\ III_v + I_v \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{}{\overset{III_v + II_v}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\text{rang}\,\bar{A} = 3 = \text{rang}\,A < 4 = \text{br. nepoznatih}$

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$\alpha_3 = 0$

$2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_4 = t$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = -t$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\|x_1\| = \sqrt{1+1+0+4} = \sqrt{6}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|x_2\| = \sqrt{1+1+1+0} = \sqrt{3}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\|x_3\| = \sqrt{1+1+4+0} = \sqrt{6}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_4\| = \sqrt{1+1+0+1} = \sqrt{3}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Dat je vektorski podprostor $\mathcal{L}$ vektorskog prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ definisan sa

$$\mathcal{L} = \left\{ A \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid AX - XA = 0, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Posmatrajući standardni unutrašnji proizvod za matrice

$$\langle A, B \rangle = \text{trag}(A^T B)$$

odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Rj.

Da bi odredili ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$ prvo je potrebno pronaći bilo kakvu bazu za $\mathcal{L}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & a \\ 2d & c \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX - XA = \begin{bmatrix} 2b-c & a-d \\ 2d-2a & c-2b \end{bmatrix}$$

$$AX - XA = 0 \iff \begin{aligned} 2b - c &= 0 \\ a - d &= 0 \\ 2d - 2a &= 0 \\ c - 2b &= 0 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_v + II_v}{\overset{IV_v + I_v \cdot 2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a - d &= 0 \\ 2b - c &= 0 \end{aligned}$$

$a = d$

$b = \frac{c}{2} \quad c = 2b$

Odavdje sad nije teško vidjeti da se prostor $\mathcal{L}$ može napisati u obliku:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} d & b \\ 2b & d \end{bmatrix} \middle| \, b,d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \beta \, \middle| \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Baza za $\mathcal{L}$ je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Sad iskoristimo Gram-Schmidtovu proceduru pa odredimo ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

<u>Klasični Gram-Schmidtov algoritam</u>

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|X_1\| = \sqrt{\operatorname{trag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2}$$

$$U_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - \langle U_1, X_2 \rangle U_1$$

$$U_2 \leftarrow \frac{U_2}{\|U_2\|}$$

$$\langle U_1, X_2 \rangle = \operatorname{trag}(U_1^T X) = \operatorname{trag}([$$

$$= \operatorname{trag}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|U_2\| = \sqrt{\operatorname{trag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Ortonormirana baza za $\mathcal{L}$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(#) Zadan je unitarni prostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) produktom $\langle A, B\rangle = trag(A^T B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Rj. Da bi odredili ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$ koristimo Gram-Schmidtov proces ortonormalizacije.

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k\rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju imamo $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2\end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$U_1 \leftarrow \frac{X_1}{\|X_1\|}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - \langle U_1, X_2\rangle U_1$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{\|U_2\|}\cdot U_2$$

$$U_3 \leftarrow X_3 - \langle U_1, X_3\rangle U_1 - \langle U_2, X_3\rangle U_2$$

$$U_3 \leftarrow \frac{1}{\|U_3\|} U_3$$

$$\|X_1\|^2 = \langle X_1, X_1\rangle = trag(X_1^T X_1) = trag\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3\end{bmatrix}\right) = 9+18 = 27$$

$$\|X_1\| = \sqrt{27} = \sqrt{3\cdot 9} = 3\sqrt{3}$$

$$U_1 \leftarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_2\rangle = trag(U_1^T X_2) = trag\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(6+0) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\langle U_1, X_2\rangle U_1 = \frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\|U_2\|^2 = trag\left(4\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{bmatrix}\right) = 4(5+4) = 36 \Rightarrow \|U_2\| = 6$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{6}\cdot 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_3\rangle = trag\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle U_2, X_3\rangle = trag\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}(-1-2) = -1$$

$$\langle U_1, X_3\rangle U_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\langle U_2, X_3\rangle U_2 = (-1)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$U_3 \leftarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow \ldots$ Ortonormirana baza za $\mathcal{L}$ je

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

(#) Dat je unitarni prostor $\mathcal{P}_3$, polinoma stepena ≤ 3, sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} p(\lambda_i) q(\lambda_i)$$

gdje su $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. Primjenom Gram-Schmidtovog procesa ortonormirati bazu $\{-1, x, -x^2, x^3\}$ i dobiti polinome $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ koji su ortogonalni i za koje vrijedi da je $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$, za $\forall i = 1,2,3,4$.

Rj. Prisjetimo se Gram-Šmitove ortogonalne procedure:
Ako je $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza za unitarni prostor $\mathcal{G}$, tada Gram-Šmitov niz definisan sa

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad i \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i\|} \quad za \; k = 2, 3, \ldots, n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{G}$.

Algoritam

za $k=1$: $\quad u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

za $k>1$: $\quad u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$\quad u_k \leftarrow \dfrac{u_k}{\|u_k\|}$

Pa slijedimo ovaj algoritam i formirajmo prvo ortonormirane polinome r_0, r_1, r_2 i r_3.

Dat je skup $\{-1, x, -x^2, x^3\}$
$\qquad\quad g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4$

$k=1$: $\quad r_1 \leftarrow \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$

Kako je $\langle p, q \rangle = \frac{1}{4}\left(p(3)q(3) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(-3)q(-3)\right)$

to je

$$\|g_1\|^2 = \langle g_1, g_1 \rangle = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$\|g_1\| = \sqrt{1} = 1$$

$$r_1 \leftarrow \frac{-1}{1} = -1 \qquad r_1(x) = -1$$

$k=2$: $\quad r_2 \leftarrow g_2 - \langle r_1, g_2 \rangle r_1, \quad r_2 \leftarrow \dfrac{r_2}{\|r_2\|}$

$$\langle r_1, g_2 \rangle = \frac{1}{4}\left(\overset{-3}{(-1)3} + \overset{-1}{(-1)\cdot 1} + \overset{1}{(-1)\cdot(-1)} + \overset{3}{(-1)\cdot(-3)}\right) = 0$$

$$r_2 \leftarrow x - 0 = x$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = 5 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{5}$$

$$r_2 \leftarrow \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x$$

$3, 1, -1, -3$

$r_1(x) = -1$

$r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x$

$g_3(x) = -x^2$

$k=3$: $\quad r_3 \leftarrow g_3 - \langle r_1, g_3 \rangle r_1 - \langle r_2, g_3 \rangle r_2$

$$\langle r_1, g_3 \rangle = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = 5$$

$$\langle r_2, g_3 \rangle = \frac{1}{4}\left(-\frac{27}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{27}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$r_3 \leftarrow -x^2 + 5, \qquad \|-x^2+5\|^2 = \langle -x^2+5, -x^2+5 \rangle = \frac{1}{4}(16+16+16+16) = 16$$

$$\|-x^2+5\| = 4$$

$$r_3 \leftarrow \frac{1}{4}(-x^2+5) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4} \qquad r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$$

Za sad imamo

$$r_1(x) = -1, \quad r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x, \quad r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}, \quad g_4 = x^3$$

$k=4$: $$r_4 \leftarrow g_4 - \langle r_1, g_4\rangle r_1 - \langle r_2, g_4\rangle r_2 - \langle r_3, g_4\rangle r_3$$

$$r_1 \cdot g_4 = -x^3$$

$$\langle r_1, g_4\rangle = \frac{1}{4}(-27-1+1+27) = 0$$

$$r_2 \cdot g_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}x^4$$

$164:4=41$

$$\langle r_2, g_4\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{81}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{81}{\sqrt{5}}\right) = \frac{41}{\sqrt{5}}.$$

$$r_3 \cdot g_4 = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{5}{4}x^3$$

$$\langle r_3, g_4\rangle = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}3^5 + \frac{5}{4}3^3 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}3^5 - \frac{5}{4}3^5\right) = 0$$

$$r_4 \leftarrow x^3 - \frac{41}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}x = x^3 - \frac{41}{5}x$$

$$\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\|^2 = \left\langle x^3 - \frac{41}{5}x, x^3 - \frac{41}{5}x\right\rangle = \dots = \frac{144}{5}$$

$$\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\| = \frac{12}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\|} = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

$$r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x$$

Skup $\left\{r_1(x) = -1,\ r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x,\ r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4},\ r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x\right\}$ je ortonormirana baza prostora $\mathcal{P}_3$ u odnosu na dati skalarni proizvod.

Ostalo je još da formiramo polinome $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ koji su ortogonalni i za koje vrijedi $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$.

Primjetimo da za proizvoljne realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i α_4 skup $\{\alpha_1 r_1, \alpha_2 r_2, \alpha_3 r_3, \alpha_4 r_4\}$ i dalje formira ortogonalan sistem.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} r_1(x) = -1 \\ \|r_1\| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_1(x) = 1 \quad \left(1 = \|p_1\|^2 = p_1(3) = 1\right)$$

$(p_1(x) = (-1)\cdot r_1)$

$$r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x, \quad r_2(3) = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad p_2(x) = \alpha \cdot r_2(x)$$

$$\|r_2\| = 1$$

$$\|p_2\|^2 = \langle p_2, p_2\rangle = \alpha^2 \langle r_2, r_2\rangle = \alpha^2 \|r_2\|^2 = \alpha^2$$

$$p_2(\lambda_0) = p_2(3) = \alpha \cdot r_2(3) = \alpha \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha^2 = \frac{3}{\sqrt{5}}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$p_2(x) = \frac{3}{5}x \qquad \left(\frac{9}{5} = \|p_2\| = p_2(\lambda_0) = \frac{9}{5}\right)$$

$$r_3 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4} \qquad p_3(x) = \beta r_3(x)$$

$$\|r_3\| = 1$$

$$\|p_3\|^2 = \langle \beta r_3, \beta r_3\rangle = \beta^2 \langle r_3, r_3\rangle = \beta^2$$

$$p_3(\lambda_0) = p_3(3) = \beta \cdot \left(-\frac{1}{4}3^2 + \frac{5}{4}\right) = \beta\left(-\frac{4}{4}\right) = -\beta$$

$$\beta = -1$$

$$p_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4} \qquad \left(p_3(\lambda_0) = 1,\ \|p_3\|^2 = 1\right)$$

$$r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x \qquad p_4(x) = \gamma \cdot r_4(x), \quad p_4(\lambda_0) = \frac{27\sqrt{5}\cdot 5 - 41\sqrt{5}\cdot 3}{60}\gamma = \frac{12\sqrt{5}}{60}\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma$$

$$p_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{41}{60}x$$

Traženi skup ortogonalnih polinoma za koje vrijedi $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$ je

$$\left\{p_1(x) = 1,\ p_2(x) = \frac{3}{5}x,\ p_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4},\ p_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{41}{60}x\right\}.$$

\# Dat je vektorski podprostor $\mathcal{M}$ prostora $\mathbb{R}^4$ definiran sa

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z_1 + 2z_2 + z_3 = 0,\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 0,\ z_1 + 5z_2 + 4z_3 = 0 \right\}.$$

Odrediti mu jedan (direktni) komplement (koji nije ortogonalni komplement).

Rj. Primjetimo da

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} z_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \ker\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \Big)$$

Prema tome $\mathcal{M} = \ker(A)$ gdje je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Prisjetimo se

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$ i u tom slučaju kažemo da je $\mathcal{V}$ direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

$\mathcal{X} + \mathcal{Y} := \{ x + y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y} \}$.

Ako $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ vrijedi sljedeće

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\ \ v = x + y \iff \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset \text{ i } \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ je baza za } \mathcal{V}$$

Odredimo prvo bazu za $\mathcal{M}$ tj. bazu za $\ker(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v + I_v(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v + II_v}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v + II_v \cdot (-2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A$$

$$Ax = 0 \iff E_A x = 0 \quad \text{gdje je } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

$x_3 = s \quad x_4 = t$

$$x = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$\mathcal{M} = \ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Baza za $\mathcal{M}$ je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Da bi odredili komplement od $\mathcal{M}$ nadopunimo skup $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{I_v+III_v}{\underset{IV_v+III_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{III_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ovo je matrica u reduciranom red ešelon obliku

(Direktni) komplement od $\mathcal{M}$ je

$$\mathcal{N} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(#) U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^T$ i $(0,1,0,1,0)^T$ i podprostor

$$\mathcal{L} = \{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.

(b) Odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$,

(c) Odrediti neku bazu za (direktni) kompliment prostora $\mathcal{L}$ (koji nije ortogonalni komplement).

Rj.

Red vektor $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$ ćemo u rješenju pisati kao kolona vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$. Prema postavci zadatka imamo

$$\mathcal{M} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Dalje

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} = \ker A$$

Generator skup za $\ker A$ su vektori iz opšteg rješenja sistema $Ax=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v + I_v\cdot(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 2 = \text{rang} \bar{A}$$

Sistem Ax ima ∞ mnogo rješenja i 3 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$

$x_1 = \cancel{x_2} - x_3 \Rightarrow x_1 = s - t$

$-x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-t\\s\\t\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}s + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

Time je $\mathcal{L} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Prema tome $\dim \mathcal{M} = 2$, $\dim \mathcal{L} = 3$ a baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$ su redom

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad i \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Prisjetimo se:

Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

gdje je $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{x+y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$.

Ako sa $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ označimo bazu za $\mathcal{M}$ a sa $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ označimo bazu za $\mathcal{L}$, vidimo da $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ generira $\mathcal{M}+\mathcal{L}$.

Dimenziju za $\mathcal{M}+\mathcal{L}$ nije teško odrediti, posmatramo broj linearno nezavisnih kolona iz $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV_v + II_v \cdot (-1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } D = 4 \Rightarrow \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = 4 = \underset{2}{\dim \mathcal{X}} + \underset{3}{\dim \mathcal{Y}} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

$$\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 1$$

U zadatku se ne traži da odredimo bazu za $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Međutim, ako bi željeli da odredimo ovu bazu prvo primjetimo da je

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i kako je $\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 1$ to je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Prisjetimo se

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad i \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$$

i u ovom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Ako su $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada

$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ akko $\forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x+y$ akko $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$

Ako sa B označimo matricu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tada je $\text{im}(B^T) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}$

pa produžimo bazu od $\mathcal{L}$ do baze prostora $\mathbb{R}^5$.

Znamo da je, za proizvoljne matrice A i B

$$\mathrm{im}(A^T) = \mathrm{im}(B^T) \text{ akko } A \overset{red}{\sim} B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{IV_v + I_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{V_v + II_v\cdot(-1)}{\overset{IV_v + II_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baza za direktni komplement prostora $\mathcal{L}$ je

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Odrediti URV faktorizaciju matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Rj: Prisjetimo se

URV faktorizacija

Za svaku matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ ranga r, postoje ortogonalne matrice $U_{m\times m}$ i $V_{n\times n}$ i nesingularna matrica $C_{r\times r}$ takve da

$$A = URV^T = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} V^T$$

- Prvih r kolona u U je ortonormirana baza za $\mathrm{im}(A)$.
- Zadnjih $m-r$ kolona od U je ortonormirana baza za $\ker(A^T)$.
- Prvih r kolona od V je ortonorm. baza za $\mathrm{im}(A^T)$
- Zadnjih $n-r$ kolona od V je orton. baza za $\ker(A)$

Pa prvo odredimo baze za četiri fundamentalna podprostora.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{III_v + I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{I_v + III_v\cdot 3}{\overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v\cdot(-1)}{\sim} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_A}$$

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathrm{im}(A^T) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Ax=0 \iff E_A x = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad x = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v \cdot (-2)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v \cdot (-1)}{\overset{I_v + III_v \cdot (3)}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{E_A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{P}\right]$$

$$\ker(A^T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sad uz pomoć Gram-Schmidtovog procesa ortonormirajmo date baze. Prisjetimo se

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Posmatrajmo bazu za $\operatorname{im}(A)$: $\left\{ \overset{x_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\|x_1\| = \sqrt{x_1^T x_1} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_2 \leftarrow x_2 - \langle u_1, x_2 \rangle u_1$$

$$\langle u_1, x_2 \rangle = u_1^T x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (3+3+10) = \frac{16}{\sqrt{6}}$$

$$\langle u_1, x_2 \rangle u_1 = \frac{16}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9-8 \\ -9+8 \\ 15-16 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{9}(1+1+1)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ortonormirana baza za $\operatorname{im}(A)$ je $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \right\}$

Posmatrajmo sad bazu za $\operatorname{im}(A^T)$: $\left\{ \overset{x_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$.

$$\|x_1\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle u_1, x_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (1\ 2\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$u_2 \leftarrow x_2 - \langle u_1, x_2 \rangle u_1 \qquad u_2 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = 1$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortonormirana baza za $\operatorname{im}(A^T)$ je $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ortonormirane baze za $\ker(A)$ i $\ker(A^T)$ su redom

$$\left\{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

Time smo odredili matrice U i V

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = URV^T$ $/\cdot U^T$ sa lijeve strane

$U^T A = RV^T$ $/\cdot V$ sa desne strane

$R = U^T A V$

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} & 3 & 0 \\ -5/\sqrt{5} & -3 & 0 \\ 10/\sqrt{5} & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30/\sqrt{30} & 16/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(#) Baza vektorskog prostora $\mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}$ je $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$. Odrediti mu jedan ortogonalni komplement (u odnosu na standardni unutrašnji (skalarni) proizvod $\langle x, y \rangle = x^T y$).

Rj.

Prisjetimo se

Ortogonalni komplement

Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora $\mathcal{V}$, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definisan sa

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x \rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \mathcal{M}\}$$

Primjetimo da je $\mathcal{L} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} = \text{im} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=A} = \text{im}(A)$.

Teorema ortogonalne dekompozicije

Za svaku matricu $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\text{im}(A)^\perp = \ker(A^T) \quad ; \quad \ker(A)^\perp = \text{im}(A^T)$$

Ortogonalni komplement prostora $\mathcal{L}$ će biti $\ker(\underbrace{[1\ -1\ 3]}_{=A^T})$.

$x - y + 3z = 0$

$z = s$, $y = t$ $\Rightarrow$ $x = t - 3s$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} t-3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$

Ortogonalni komplement za $\mathcal{L}$ je $\mathcal{L}^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(#) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ dat je podprostor

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x^2-1,\ x+1\}$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2+x+5$ u obliku sume $p = p_1+p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

Rj. Prisjetimo se

Ortogonalni komplement
Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definisan sa

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in V \mid \langle m,x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \mathcal{M}\}$$

Primjetimo da je $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$. Kako je

$\dim(\mathcal{M}) = 2$ i $\mathcal{P}_2 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ to je $\dim(\mathcal{M}^\perp) = 1$.

Da bi odredili $\mathcal{M}^\perp$ dovoljno je pronaći polinom $p(x) = ax^2+bx+c$ takav da $\langle p,q\rangle = 0$ $\forall q \in \mathcal{M}$.
Zbog $\dim(\mathcal{M}^\perp) = 1$ dobijeni polinom će biti baza za $\mathcal{M}^\perp$.
Da bi odredili polinom $p(x) = ax^2+bx+c$ za koji vrijedi $\langle p,q\rangle = 0$ $\forall q \in \mathcal{M}$ najjednostavnije je posmatrati bazu za $\mathcal{M}$ tj. skup $\{x^2-1,\ x+1\}$

$$\langle ax^2+bx+c,\ x^2-1\rangle = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+\underline{cx^2-ax^2}-bx-c)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c)\,dx = 0$$

$$\frac{a}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{b}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + (c-a)\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} - \underbrace{\frac{b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - cx\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}(c-a) - 2c = 0$$

$$\frac{2}{5}a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c - 2c = 0 \Rightarrow \frac{6-10}{15}a + \frac{2-6}{3}c = 0$$

$$-\frac{4}{15}a - \frac{4}{3}c = 0 \quad \dots (*)$$

$$\langle ax^2+bx+c,\ x+1\rangle = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x+1)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+\underline{bx^2}+\underline{\underline{cx}}+\underline{ax^2}+\underline{\underline{bx}}+c)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c)\,dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{a}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + \frac{b+a}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{c+b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + cx\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + 2c = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + 2c = 0 \quad \dots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da imamo sistem od dvije jednačine su tri nepoznate. Jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno npr.

$a = 15t,\ t \in \mathbb{R}$

$(*) \Rightarrow -\frac{4}{15} \cdot 15t - \frac{4}{3}c = 0$

$-4t - \frac{4}{3}c = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}c = -4t \Rightarrow c = -3t,\ t \in \mathbb{R}$

$(**) \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 15t + \frac{2}{3}b + 2 \cdot (-3)t = 0$

$10t + \frac{2}{3}b - 6t = 0$

$\frac{2}{3}b = -4t \quad / \cdot 3 \Rightarrow 2b = -12t \Rightarrow b = -6t$

Sad ax^2+bx+c postaje (za $t=1$) $15x^2 - 6x - 3 \quad / : 15$

$x^2 - \frac{6}{15}x - \frac{3}{15}$

Odavde vidimo da je $\mathcal{M}^\perp = \text{span}\{x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\}$

baza za $\mathcal{M}^\perp$

Ostalo je još da pronađemo skalare α, β i γ tako da

$$2x^2 + x + 5 = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x+1) + \gamma\left(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right)$$

$\alpha + \gamma = 2 \quad \ldots(1)$

$\beta - \frac{2}{5}\gamma = 1 \quad \ldots(2)$

$-\alpha + \beta - \frac{1}{5}\gamma = 5 \quad \ldots(3)$

$(1)+(3):\ \beta + \frac{4}{5}\gamma = 7 \quad (I)$

$(2):\ \beta - \frac{2}{5}\gamma = 1 \quad (II)$

$(I)-(II):\ \frac{6}{5}\gamma = 6 \quad / \cdot 5$

$6\gamma = 30 \Rightarrow \gamma = 5$

$\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 7 - 4$

$\beta = 3 \Rightarrow \alpha = -3$

Prema tome

$$2x^2 + x + 5 = \underbrace{(-3)(x^2-1) + 3(x+1)}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{5\left(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right)}_{\in \mathcal{M}^\perp}$$

(#) Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

(a) Provjeriti da li je sa

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$$

definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.

b) Za podprostor $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.

c) Odrediti ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2 + x + 2$ na $\mathcal{L}$.

R.:

(a) Prisjetimo se

Unutrašnji proizvod na realnom (ili kompleksnom) vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava svaki uređen par vektora x, y u realni (ili kompleksan) skalar $\langle x, y \rangle$ tako da vrijede sljedeće četri osobine

- $\langle x, x \rangle$ je realan sa $\langle x, x \rangle \geq 0$, i $\langle x, x \rangle = 0$ akko $x = 0$,
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ za svaki skalar α
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (za realni prostor, ovo postaje $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)

Realan ili kompleksan vektorski prostor koji je opremljen sa unutrašnjim proizvodom zovemo unitarni prostor

(i) pokažimo da je $\langle p, p \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle p, p \rangle \geq 0$ i $\langle p, p \rangle = 0$ akko $p = 0$

$\langle p, p \rangle = p(1)p(1) + 2p(0)p(0) + p(-1)p(-1) =$

$= \underbrace{(a+b+c)^2}_{\in \mathbb{R}} + 2\underbrace{c^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a-b+c)^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$

$\langle p,p\rangle = 0$ akko $(a+b+c)^2 + 2c^2 + (a-b+c)^2 = 0$ akko

$$\begin{matrix}(a+b+c)^2=0\\ 2c^2=0\\ (a-b+c)^2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}a+b+c=0\\ c=0\\ a-b+c=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}a+b=0\\ a-b=0\end{matrix}$$

$\Leftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$ $\Leftrightarrow$ $p=0$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle p, \alpha q\rangle = p(1)\alpha q(1) + 2p(0)\alpha q(0) + p(-1)\alpha q(-1) =$

$= \alpha\left(p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)\right) = \alpha\langle p,q\rangle \quad \forall\alpha$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle p, q+r\rangle = \underbrace{p(1)\left[q(1)+r(1)\right]}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2p(0)\left[q(0)+r(0)\right]}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{p(-1)\left[q(-1)+r(-1)\right]}_{\in\mathbb{R}}$

$= p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1) + p(1)r(1) + 2p(0)r(0) + p(-1)r(-1)$

$= \langle p,q\rangle + \langle p,r\rangle$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle p,q\rangle = \underbrace{p(1)q(1)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2p(0)q(0)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{p(-1)q(-1)}_{\in\mathbb{R}} = q(1)p(1) + 2q(0)p(0) + q(-1)p(-1)$

$= \langle q,p\rangle$

vrijedi četvrta osobina

Dati proizvod jest unutrašnji proizvod na $\mathcal{P}_2$.

b) Prisjetimo se

Ortogonalni komplement

Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora $\mathcal{V}$, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definisan kao skup svih vektora u $\mathcal{V}$ koji su ortogonalni na svaki vektor u $\mathcal{M}$, tj.

$$\mathcal{M}^\perp = \{x\in\mathcal{V} \mid \langle m,x\rangle = 0 \quad \forall m\in\mathcal{M}\}$$

$\mathcal{L} = \operatorname{span}\{p_1(x), p_2(x)\} = \{\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$

$= \{\alpha_1 + \alpha_2 x \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}^\perp = \{ax^2+bx+c \mid$ gdje su a,b i c realni brojevi koje trebamo odrediti$\}$

Pa izaberimo proizvoljne $p\in\mathcal{L}$ i $q\in\mathcal{L}^\perp$

$\langle p,q\rangle = 0$

$(\alpha_1+\alpha_2)(a+b+c) + 2\alpha_1 c + (\alpha_1-\alpha_2)(a-b+c) = 0$

$2\alpha_1 a + 2\alpha_2 b + 4\alpha_1 c = 0 \quad /:2$

$\alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0$

Trebamo odrediti a,b i c tako da ova jednakost vrijedi za $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

Za $a=2,\ b=0,\ c=-1$ $\alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0 \quad \forall\alpha_1,\alpha_2$

Kako je $\dim(\mathcal{P}_2)=3$ i $\dim(\mathcal{L})=2$ to je $\dim(\mathcal{L}^\perp)=1$.

Primijetimo da ako za izaberemo proizvoljan realan broj β moramo imati $a=-2\beta,\ b=0$ da bi jednakost

$\alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0$ vrijedila za sve realne $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Prema tome

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{-2\beta x^2 + \beta \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(-2x^2+1)\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{span}\{-2x^2+1\}.$$

Ako sa $p_3(x)$ označimo polinom $p_3(x) = -2x^2+1$, primijetimo da

$$\langle p_1(x), p_3(x) \rangle = \langle 1, -2x^2+1 \rangle = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$$

$$\langle p_2(x), p_3(x) \rangle = \langle x, -2x^2+1 \rangle = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 0$$

Ortogonalni komplement prostora $\mathcal{L}$ je $\mathcal{L}^{\perp} = \text{span}\{-2x^2+1\}$.

c) Prisjetimo se

Ortogonalna projekcija

Za $v \in V$ neka je $v = m + n$, gdje je $m \in M$ i $n \in M^{\perp}$.

Vektor m se zove ortogonalna projekcija od v na M.

Primijetimo da je $p(x) = \underbrace{x+1}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{(-2)x^2+1}_{\in \mathcal{L}^{\perp}}$ pa je

$x+1$ ortogonalna projekcija od $p(x) = -2x^2+x+1$ na $\mathcal{L}$.